Russian Technological Journal.
2025;13(6):104–115

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

УДК 539.3
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-104-115
EDN NGHUVB

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Метод расщепления интегрального преобразования в задачах сложного теплообмена

Э.М. Карташов @

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
@ *Автор для переписки, e-mail: professor.kartashov@gmail.com*

• **Поступила:** 11.04.2025 • **Доработана:** 02.07.2025 • **Принята к опубликованию:** 06.10.2025

Резюме

Цели. Статья посвящена развитию достаточно редкого метода расщепления интегрального преобразования Фурье – Ханкеля при нахождении точного аналитического решения обобщенной третьей краевой задачи сложного теплообмена с переменным во времени коэффициентом теплообмена и переменной во времени температурой окружающей среды. Обобщение заключается в том, что исходная задача рассматривается одновременно в трех системах координат: декартовой (полупространство, ограниченное плоской поверхностью), цилиндрической (пространство, ограниченное изнутри цилиндрической полостью), сферической (пространство, ограниченное изнутри сферической полостью).

Методы. Используется развитое для этих целей обобщенное интегральное преобразование одновременно в трех системах координат и метод его расщепления применительно к задаче сложного теплообмена.

Результаты. Предварительно создан специальный математический аппарат – обобщенное интегральное преобразование Фурье – Ханкеля одновременно для трех систем координат (в литературе указанное преобразование сформулировано для каждой системы координат отдельно). Наличие указанного математического аппарата позволило развить метод его расщепления и получить точное аналитическое решение третьей краевой задачи нестационарной теплопроводности сложного теплообмена одновременно для всех трех систем координат. В качестве иллюстрации рассмотрен частный случай в декартовых координатах и установлен быстрый рост пикаровского процесса.

Выводы. На основе развитого специального математического аппарата получено точное аналитическое решение обобщенной третьей краевой задачи теплопроводности с переменными во времени коэффициентом теплообмена и температуры окружающей среды одновременно в трех системах координат. Полученные результаты составляют научную новизну работы и являются новыми в аналитической теплофизике.

Ключевые слова: интегральное преобразование обобщенного типа, метод расщепления, аналитическое решение тепловой задачи

Для цитирования: Карташов Э.М. Метод расщепления интегрального преобразования в задачах сложного теплообмена. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):104–115. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-104-115, https://www.elibrary.ru/NGHUVB

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Method for splitting integral transformation in problems of complex heat transfer

Eduard M. Kartashov @

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia
@ Corresponding author, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

• **Submitted:** 11.04.2025 • **Revised:** 02.07.2025 • **Accepted:** 06.10.2025

Abstract
Objectives. This paper presents the development of a rather rare method for splitting the integral Fourier–Hankel transform when finding an exact analytical solution to the generalized third boundary value problem of complex heat transfer, where both the heat transfer coefficient and ambient temperature vary in time. The generalization lies in the simultaneous consideration of the problem in three different coordinate systems: Cartesian (a half-space bounded by a flat surface), cylindrical (a space bounded by a cylindrical cavity from the inside), and spherical (a space bounded by a spherical cavity from the inside). The aim was to develop a method for splitting the integral transformation as applied to finding an exact analytical solution to a generalized model problem of non-stationary thermal conductivity of complex heat exchange with an arbitrary dependence of the heat exchange coefficient and ambient temperature on time.
Methods. The generalized integral transformation developed for these purposes is used simultaneously in three coordinate systems, and the method for its splitting is applied to the problem of complex heat transfer.
Results. Initially, a special mathematical apparatus constituting a generalized integral Fourier–Hankel transform for three coordinate systems simultaneously was developed. For comparison, in the literature, such a transformation is formulated, as a rule, separately for each coordinate system. The availability of this mathematical apparatus made it possible to develop a method for its splitting and to obtain an exact analytical solution to the third boundary value problem for nonstationary thermal conductivity in complex heat transfer, simultaneously for all three coordinate systems. To illustrate this, a specific case in Cartesian coordinates was considered and a rapid growth of the Picard process was established.
Conclusions. Based on the developed special mathematical apparatus, an exact analytical solution to the generalized third boundary value problem of heat conductivity with time-varying heat transfer coefficient and ambient temperature, simultaneously in three coordinate systems, was obtained. These results constitute the scientific novelty of the work and represent a significant contribution to analytical thermal physics.

Keywords: generalized integral transformation, splitting method, analytical solution to the thermal problem

For citation: Kartashov E.M. Method for splitting integral transformation in problems of complex heat transfer. *Russian Technological Journal.* 2025;13(6):104–115. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-104-115, https://www.elibrary.ru/NGHUVB

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи тепло- и массопереноса с граничным условием

$$(\partial T / \partial n)\big|_{\Gamma} = h(t)\left[T_{\Gamma} - T_{\text{c}}(t)\right],\ t > 0$$

относятся к сложному теплообмену вследствие зависимости $h(t) = \alpha(t)/\lambda^*$. Здесь T_Γ – температура на границе области, $\overline{n}$ – вектор нормали, T_{c} – температура окружающей среды, $\alpha(t)$ – коэффициент теплообмена, λ^* – теплопроводность материала, t – время. Так как его определение оказывается весьма затруднительным, то практически во всех критериальных уравнениях $\alpha(t)$ принимается постоянной величиной $\alpha = \text{const}$ ($h = \alpha/\lambda^* = \text{const}$), что позволяет получать точные аналитические решения соответствующих задач теплообмена. Для этих целей разработаны специальные расчетные таблицы [1], вошедшие в теорию теплообмена как таблицы Карташова № 1, № 2, позволяющие быстро выписать и улучшить аналитическое решение тепловой задачи в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат и далее улучшить решение в виде ряда Фурье – Ханкеля до абсолютной и равномерной сходимости ряда вплоть до границы области определения дифференциального уравнения теплопроводности. В случае задания зависимости коэффициента h от времени ($h = h(t)$) ситуация с нахождением аналитических решений модельных задач резко меняется: точное аналитическое решение задачи получить не удается [2–6]. До настоящего времени указанная проблема остается открытой.

Начиная с 1950-х гг. прошлого столетия в большом числе публикаций авторов различных направлений (математиков, физиков, механиков, химиков – последние изучали процессы диффузии в металлах в физической химии) предпринимались попытки получить точное или приближенное аналитическое решение задачи сложного теплообмена. Использовались многочисленные подходы классических дифференциальных уравнений математической физики [7, 8]. Однако, несмотря на многообразие подходов, каждый из них, в конечном счете, приводил к приближенному решению задачи либо к наиболее удачному первому приближению пикаровского процесса (также приближенному решению). По существу, данная проблема остается открытой до сих пор.

Рассмотрим обобщенную постановку задачи в виде:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{2m+1}{x}\frac{\partial T}{\partial x}\right),\ x>x_0,\ t>0,\\&T(x,t)\big|_{t=0}=T_0,\ x\ge x_0,\ \left|T(x,t)\right|<\infty,\ x\ge x_0,\ t\ge 0,\\&\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=x_0}=h(t)\left[T(x,t)\big|_{x=x_0}-\varphi(t)\right],\ t>0.\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Здесь $m = -1/2, 0, 1/2$ соответственно для декартовой, цилиндрической и сферической систем координат, a – температуропроводность, x, x_0 – параметры модели. Функции $h(t)$, $\varphi(t)$ – неотрицательные и абсолютно интегрируемые на полупространстве $[0, +\infty)$. В этом случае выполняются условия теоремы существования и единственности решения рассматриваемой задачи (1), т.е. существует и является единственным решение $T(x,t)\in L^2\left[(x_0,\infty)\times L^1(0,\infty)\right]$, где L^n – множество функций, непрерывно дифференцируемых до порядка n [8–10]. Нахождению этого решения и посвящена настоящая работа. Дальнейшее обобщение обсуждаемой здесь теории – переход к локально-неравновесному теплообмену, где учитывается конечная скорость распространения теплоты[1] [11–16].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Аналитическое решение задачи (1) получим методом расщепления интегрального преобразования Фурье – Ханкеля обобщенного типа. Указанное преобразование строится на основе соотношений операционного исчисления, развитых в [1]. Выпишем окончательный результат всех определяющих соотношений.

Обобщенное интегральное преобразование функции $T(x, t)$ для третьей краевой задачи:

$$\overline{T}(\lambda,t)=\int_{x_0}^{\infty}\rho^{2m+1}T(\rho,t)\Psi(\lambda,\rho)d\rho,\tag{2}$$

$$T(x,t)=\int_0^{\infty}\frac{\overline{T}(\lambda,t)\Psi(\lambda,x)}{\left[\lambda J_{m+1}(\lambda x_0)+hJ_m(\lambda x_0)\right]^2+\left[\lambda Y_{m+1}(\lambda x_0)+hY_m(\lambda x_0)\right]^2}\lambda d\lambda,\tag{3}$$

$$\Psi(\lambda,x)=x^{-m}\left\{\lambda\left[J_m(\lambda x)Y_{m+1}(\lambda x_0)-Y_m(\lambda x)J_{m+1}(\lambda x_0)\right]+h\left[J_m(\lambda x)Y_m(\lambda x_0)-Y_m(\lambda x)J_m(\lambda x_0)\right]\right\}.\tag{4}$$

При этом изображение оператора $\Delta T(x, t)$ имеет вид:

$$\int_{x_0}^{\infty}\rho^{2m+1}\Delta T(\rho,t)\Psi(\lambda,\rho)d\rho=\frac{2x_0^{-m}}{\pi}\left[\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}-hT(x,t)\right]\bigg|_{x=x_0}-\lambda^2\overline{T}(\lambda,t).\tag{5}$$

Здесь $J_m(\cdot)$, $Y_m(\cdot)$ – функции Бесселя.

[1] Савельева Ю.И. *Разработка и анализ математической модели термомеханики структурно-чувствительных материалов*: автореферат дис. … д.ф.-м.н. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2023. 32 с. [Savelyeva I.Yu. *Development and analysis of the mathematical model of thermomechanics of structurally sensitive materials*. Dr. Sci. Thesis (Phys.-Math.), Bauman Moscow State Technical University; 2023, 32 p. (in Russ.).]

Имея обобщенное интегральное преобразование (2)–(5), нетрудно выписать точное аналитическое решение задачи (1) при h = const, включая все неоднородности как в уравнении (внутренний нестационарный источник теплоты), так и в краевых условиях (наличие начальной температуры и температуры окружающей среды). Из (2)–(5) нетрудно получить соответствующие преобразования в цилиндрических координатах при $m = 0$, в декартовых – при $m = -1/2$ и в сферических – при $m = 1/2$.

ПОСТРОЕНИЕ ТОЧНОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ РАСЩЕПЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Рассмотрим задачу (1) в безразмерных переменных:

$$\rho = x / x_0,\ F_0 = at / x_0^2,\ Bi(F_0) = \frac{\alpha(t)x_0}{\lambda^*},\ \ \Theta(\rho, F_0) = \frac{T(x,t) - T_0}{T_c^* - T_0},\ T_c(F_0) = \frac{\varphi(t) - T_0}{T_c^* - T_0}, \tag{6}$$

где T_c^* – выбранная единица масштаба, Bi – безразмерный коэффициент теплообмена.

Теперь можно записать задачу (1) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Theta}{\partial F_0} = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\rho^2} + \frac{2m+1}{\rho}\frac{\partial\Theta}{\partial\rho},\ \rho > 1, F_0 > 0,\\ &\Theta(\rho, F_0)\Big|_{F_0=0} = 0,\ \rho \ge 1, \left|\Theta(\rho, F_0)\right| < \infty,\ \rho \ge 1, F_0 \ge 0,\\ &\frac{\partial\Theta(\rho, F_0)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=1} = Bi(F_0)\Big[\Theta(\rho, F_0)\Big|_{\rho=1} - T_c(F_0)\Big], F_0 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Обобщенное интегральное преобразование (2)–(5) запишем в виде:

$$\overline{\Theta}(\lambda, F_0) = \int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho, F_0) K(\rho, \lambda, F_0) d\rho, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} K(\rho, \lambda, F_0) &= \rho^{-m}\left\{\lambda\left[J_m(\lambda\rho)Y_{m+1}(\lambda) - Y_m(\lambda\rho)J_{m+1}(\lambda)\right] + Bi(F_0)\left[J_m(\lambda\rho)Y_m(\lambda) - Y_m(\lambda\rho)J_m(\lambda)\right]\right\} = \\ &= \left[Bi(F_0)Y_m(\lambda) + \lambda Y_{m+1}(\lambda)\right]\left[\rho^{-m}J_m(\lambda\rho)\right] - \left[Bi(F_0)J_m(\lambda) + \lambda J_{m+1}(\lambda)\right]\left[\rho^{-m}Y_m(\lambda\rho)\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Обозначим:

$$\left.\begin{aligned} \alpha(\lambda, F_0) &= Bi(F_0)Y_m(\lambda) + \lambda Y_{m+1}(\lambda),\\ \beta(\lambda, F_0) &= Bi(F_0)J_m(\lambda) + \lambda J_{m+1}(\lambda). \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда формула обращения для преобразования (8) будет иметь вид:

$$\Theta(\rho, F_0) = \int_0^\infty \overline{\Theta}(\lambda, F_0)\frac{K(\rho, \lambda, F_0)}{\alpha^2(\lambda, F_0) + \beta^2(\lambda, F_0)}\lambda d\lambda. \tag{11}$$

При этом

$$K(\rho, \lambda, F_0) = \alpha(\lambda, F_0)\left[\rho^{-m}J_m(\lambda\rho)\right] - \beta(\lambda, F_0)\left[\rho^{-m}Y_m(\lambda\rho)\right], \tag{12}$$

$$\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Delta\Theta(\rho, F_0)K(\rho, \lambda, F_0)d\rho = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial\Theta(\rho, F_0)}{\partial\rho} - Bi(F_0)\Theta(\rho, F_0)\right]\Bigg|_{\rho=1} - \lambda^2\overline{\Theta}(\lambda, F_0). \tag{13}$$

Введем ряд важных обозначений:

$$\left.\begin{aligned} \omega(\lambda,F_0)&=\alpha(\lambda,F_0)+i\beta(\lambda,F_0),\\ \overline{\omega}(\lambda,F_0)&=\alpha(\lambda,F_0)-i\beta(\lambda,F_0),\\ H_0^{(1)}(\lambda\rho)&=\left[J_m(\lambda\rho)+iY_m(\lambda\rho)\right](\rho^{-m}),\\ H_0^{(2)}(\lambda\rho)&=\left[J_m(\lambda\rho)-iY_m(\lambda\rho)\right](\rho^{-m}),\\ A(\lambda,F_0)&=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)H_0^{(1)}(\lambda\rho)d\rho,\\ \overline{A}(\lambda,F_0)&=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)H_0^{(2)}(\lambda\rho)d\rho. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Тогда можно записать:

$$\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=\frac{1}{2}\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)+\overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0)\right] \tag{15}$$

или

$$\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=\mathrm{Re}\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)\right]. \tag{16}$$

Дальнейшая цель – перевести исходную задачу (7) в пространство изображений (8). Вначале запишем интегральное преобразование левой части уравнения в (7):

$$\frac{\partial\overline{\Theta}(\lambda,F_0)}{\partial F_0}=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}K(\rho,\lambda,F_0)d\rho=\frac{1}{2}\left[\omega(\lambda,F_0)\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\overline{\omega}(\lambda,F_0)\frac{\partial\overline{A}(\lambda,F_0)}{\partial F_0}\right].$$

Изображение оператора $\Delta\Theta(\rho,F_0)$ в (13) будет иметь вид:

$$\begin{gathered}\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Delta\Theta(\rho,F_0)K(\rho,\lambda,F_0)d\rho=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial\rho}-Bi(F_0)\Theta(\rho,F_0)\right]\Bigg|_{\rho=1}-\lambda^2\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=\\ =-\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0)-\lambda^2\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=-\frac{1}{2}\lambda^2\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)+\overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0)\right]-\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0).\end{gathered} \tag{17}$$

Теперь исходную задачу (7) можно записать в виде:

$$\left.\begin{gathered}\omega(\lambda,F_0)\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\overline{\omega}(\lambda,F_0)\frac{\partial\overline{A}(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\lambda^2\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)+\overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0)\right]=-\frac{4}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0),F_0>0,\\ A(\lambda,0)=\overline{A}(\lambda,0)=0\end{gathered}\right\} \tag{18}$$

или

$$\left.\begin{gathered}\left[\omega(\lambda,F_0)\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\lambda^2\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0)\right]=\\ =-\left[\overline{\omega}(\lambda,F_0)\frac{\partial\overline{A}(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\lambda^2\overline{\omega}(\lambda,F_0)\overline{A}(\lambda,F_0)+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0)\right],F_0>0,\\ A(\lambda,0)=\overline{A}(\lambda,0)=0.\end{gathered}\right\} \tag{19}$$

Рассмотрим подробнее равенство (18). После преобразований получим важное соотношение:

$$\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}K(\rho,\lambda,F_0)d\rho+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)d\rho+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0)=W(\lambda,F_0)=0. \tag{20}$$

Теперь раскроем левую часть уравнения в (19). Находим:

$$\begin{gathered}\left[\alpha(\lambda,F_0)+i\beta(\lambda,F_0)\right]\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}\left[(J_m(\lambda\rho)+iY_m(\lambda\rho))\rho^{-m}\right]d\rho+\\+\lambda^2\left[\alpha(\lambda,F_0)+i\beta(\lambda,F_0)\right]\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\left[(J_m(\lambda\rho)+iY_m(\lambda\rho))\rho^{-m}\right]d\rho+\\+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0)=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}K(\rho,\lambda,F_0)d\rho+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)K(\rho,\lambda,F_0)d\rho+\frac{2}{\pi}Bi(F_0)T_{\text{c}}(F_0)+\\+i\left\{\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho+\right.\\\left.+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho\right\}=W(\lambda,F_0)+i\Psi(\lambda,F_0)=i\Psi(\lambda,F_0).\end{gathered}$$

Здесь:

$$\begin{gathered}\Psi(\lambda,F_0)=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial F_0}\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho+\\+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho.\end{gathered} \tag{21}$$

Теперь искомая задача сводится к следующей задаче Коши:

$$\left.\begin{gathered}\frac{\partial A(\lambda,F_0)}{\partial F_0}+\lambda^2A(\lambda,F_0)=-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{Bi(F_0)}{\omega(\lambda,F_0)}T_{\text{c}}(F_0)+i\frac{\Psi(\lambda,F_0)}{\omega(\lambda,F_0)},F_0>0,\\A(\lambda,0)=0\end{gathered}\right\} \tag{22}$$

с решением в виде:

$$A(\lambda,F_0)=-\frac{2}{\pi}\int_0^{F_0}\frac{Bi(\tau)T_{\text{c}}(\tau)}{\omega(\lambda,\tau)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]d\tau+i\int_0^{F_0}\frac{\Psi(\lambda,\tau)}{\omega(\lambda,\tau)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]d\tau. \tag{23}$$

При этом

$$\frac{1}{\omega(\lambda,\tau)}=\frac{\alpha(\lambda,\tau)-i\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}.$$

Принципиальное равенство для дальнейших исследований имеет вид:

$$\overline{\Theta}(\lambda,F_0)=\mathrm{Re}\left[\omega(\lambda,F_0)A(\lambda,F_0)\right]. \tag{24}$$

Раскроем $\Psi(\lambda, F_0)$:

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda,F_0)&=\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Delta\Theta(\rho,F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho+\\&+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho=\\&=\int_1^\infty \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{2m+1}\frac{\partial\Theta(\rho,F_0)}{\partial\rho}\right)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho+\\&+\lambda^2\int_1^\infty \rho^{2m+1}\Theta(\rho,F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})+\alpha(\lambda,F_0)(Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m})\right]d\rho.\end{aligned}\tag{25}$$

Интегрируя дважды по частям (первый интеграл в (25)) и учитывая соотношения

$$\frac{1}{\rho^{2m+1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\rho^{2m+1}\frac{\partial(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m})}{\partial\rho}\right]=-\lambda^2(J_m(\lambda\rho)\rho^{-m}),$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[J_m(\lambda\rho)\rho^{-m}\right]=-\lambda\left[J_{m+1}(\lambda\rho)\rho^{-m}\right],$$

справедливые также и для $[Y_m(\lambda\rho)\rho^{-m}]$, устанавливаем, что

$$\Psi(\lambda,F_0)=-\left\{\Theta(1,F_0)\left[\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)\right]-Bi(F_0)T_c(F_0)\left[\beta(\lambda,F_0)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,F_0)Y_m(\lambda)\right]\right\}.\tag{26}$$

Используем (24). Перемножая $\omega(\lambda, F_0)$ из (14) и $A(\lambda, F_0)$ из (23), выделяем действительную часть и после длительных преобразований приходим к результату:

$$\begin{aligned}\overline{\Theta}(\lambda,F_0)&=\left(-\frac{2}{\pi}\right)\left\{\int_0^{F_0}\left[\frac{Bi(\tau)T_c(\tau)\alpha(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\alpha(\lambda,F_0)+\frac{Bi(\tau)T_c(\tau)\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\beta(\lambda,F_0)\right]\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]d\tau\right\}-\\&-\int_0^{F_0}\Theta(1,\tau)\left[\alpha(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)-\beta(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)\right]\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]d\tau+\\&+\int_0^{F_0}\left\{Bi(\tau)T_c(\tau)\left[\beta(\lambda,\tau)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,\tau)Y_m(\lambda)\right]\frac{\left[\beta(\lambda,\tau)\alpha(\lambda,F_0)-\alpha(\lambda,\tau)\beta(\lambda,F_0)\right]}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\right\}d\tau.\end{aligned}$$

По теореме обращения (11) можно записать искомую функцию $\Theta(\rho, F_0)$ – решение задачи (7):

$$\begin{aligned}\Theta(\rho,F_0)&=\int_0^\infty\overline{\Theta}(\lambda,F_0)\frac{K(\rho,\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\lambda d\lambda=\left(-\frac{2}{\pi}\right)\int_0^{F_0}Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\int_0^\infty\frac{K(\rho,\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times\\&\times\frac{\alpha(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)+\beta(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda+\int_0^{F_0}Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\int_0^\infty\frac{K(\rho,\lambda,F_0)\left[\beta(\lambda,\tau)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,\tau)Y_m(\lambda)\right]}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\times\\&\times\frac{\beta(\lambda,\tau)\alpha(\lambda,F_0)-\alpha(\lambda,\tau)\beta(\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda-\\&-\int_0^{F_0}\Theta(1,\tau)d\tau\int_0^\infty\frac{K(\rho,\lambda,F_0)\left[\alpha(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)-\beta(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)\right]}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda.\end{aligned}\tag{27}$$

Правая часть (27) зависит от неизвестной величины $\Theta(1, F_0)$. Полагая в (27) $\rho = 1$ и используя соотношение $J_m(z)Y_{m+1}(z) - J_{m+1}(z)Y_m(z) = -2/(\pi z)$, приходим к интегральному уравнению Вольтера второго рода относительно $\Theta(1, F_0)$:

$$\Theta(1,F_0) = \Theta_1(F_0) + \frac{2}{\pi}\int_0^{F_0}\Theta_2(\tau,F_0)\Theta(1,\tau)d\tau, \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned}\Theta_1(F_0) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^{F_0} Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\int_0^{\infty}\frac{\alpha(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)+\beta(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\cdot\frac{\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\lambda d\lambda - \\ &-\frac{2}{\pi}\int_0^{F_0} Bi(\tau)T_c(\tau)d\tau\int_0^{\infty}\frac{\beta(\lambda,\tau)J_m(\lambda)+\alpha(\lambda,\tau)Y_m(\lambda)}{\alpha^2(\lambda,\tau)+\beta^2(\lambda,\tau)}\cdot\frac{\beta(\lambda,\tau)\alpha(\lambda,F_0)-\alpha(\lambda,\tau)\beta(\lambda,F_0)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda,\end{aligned} \tag{29}$$

$$\Theta_2(\tau,F_0) = \int_0^{\infty}\frac{\alpha(\lambda,F_0)\beta(\lambda,\tau)-\beta(\lambda,F_0)\alpha(\lambda,\tau)}{\alpha^2(\lambda,F_0)+\beta^2(\lambda,F_0)}\exp\left[-\lambda^2(F_0-\tau)\right]\lambda d\lambda. \tag{30}$$

Решение интегрального уравнения (28) можно представить в виде пикаровского процесса последовательных приближений:

$$\Theta(1,F_0) = \Psi_0(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\Psi_n(F_0), \tag{31}$$

где

$$\Psi_0(F_0) = \Theta_1(F_0), \Psi_n(F_0) = \int_0^{F_0}\Theta_2(\tau,F_0)\Psi_{n-1}(\tau)d\tau. \tag{32}$$

Из (31), (32) находим искомую величину в виде:

$$\Theta(1,F_0) = \Theta_1(F_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int_0^{F_0}\Theta_2(\tau,F_0)d\tau\int_0^{\tau}\Theta_2(\tau_1,\tau)d\tau_1\ldots\int_0^{\tau_{n-2}}\Theta_2(\tau_{n-1},\tau_{n-2})\Theta_1(\tau_{n-1})d\tau_{n-1}, \tag{33}$$

чем и завершается процедура нахождения точного аналитического решения обобщенной задачи (7) сложного теплообмена.

Следует отметить, что это решение (в обобщенной форме) – первое в литературе по аналитической теплофизике.

ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗВИТОГО ПОДХОДА

В качестве приложения развитого подхода при решении задачи (1) рассмотрим случай декартовых координат: $m = -1/2$, $x_0 = 0$, $\varphi(t) = T_c$. При этом необходимо учесть, что

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{2/\pi}\sin(z/\sqrt{z}),\ J_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi}\cos(z/\sqrt{z}),$$
$$Y_{1/2}(z) = -\sqrt{2/\pi}\cos(z/\sqrt{z}),\ Y_{-1/2}(z) = \sqrt{2/\pi}\sin(z/\sqrt{z}).$$

В безразмерных переменных

$$z = x/l, F_0 = at/l^2, Bi(F_0) = \alpha(t)l/\lambda^*,\ \Theta(z,F_0) = \frac{T(x,t)-T_0}{T_c - T_0},$$

где l – выбранная единица масштаба, имеем задачу:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Theta(z,F_0)}{\partial F_0}=\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2},\ z>0,\ F_0>0,\\
&\Theta(z,F_0)\Big|_{F_0=0}=0,\ z\ge 0,\ \left|\Theta(z,F_0)\right|<\infty,\ z\ge 0,\ F_0\ge 0,\\
&\frac{\partial\Theta(z,F_0)}{\partial z}\Big|_{z=0}=Bi(F_0)\left[\Theta(z,F_0)-1\right],\ F_0>0.
\end{aligned}\right\}\tag{34}$$

Опуская длительные преобразования перехода от обобщенных координат к декартовым, получим следующее аналитическое решение задачи (34):

$$\begin{aligned}
\Theta(z,F_0)=&\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{F_0}Bi(\tau)d\tau\int\limits_0^{\infty}\left[\cos\xi z+\frac{Bi(F_0)}{\xi}\sin\xi z\right]\frac{\xi^2}{\xi^2+Bi^2(F_0)}\exp\left[-\xi^2(F_0-\tau)\right]d\xi+\\
&+\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{F_0}\Theta(0,\tau)\left[Bi(F_0)-Bi(\tau)\right]d\tau\int\limits_0^{\infty}\left[\cos\xi z+\frac{Bi(F_0)}{\xi}\sin\xi z\right]\frac{\xi^2}{\xi^2+Bi^2(F_0)}\exp\left[-\xi^2(F_0-\tau)\right]d\xi,
\end{aligned}\tag{35}$$

где

$$\Theta(0,F_0)=\Theta_1(F_0)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\int\limits_0^{F_0}\Theta_2(F_0,\tau)d\tau\int\limits_0^{\tau}\Theta_2(\tau,\tau_1)d\tau_1...\int\limits_0^{\tau_{n-2}}\Theta_1(\tau_{n-1})\Theta_2(\tau_{n-2},\tau_{n-1})d\tau_{n-1},\tag{36}$$

$$\Theta_1(F_0)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{F_0}Bi(\tau)\Psi_0(F_0,\tau)d\tau,$$

$$\Theta_2(F_0,\tau)=\left[Bi(F_0)-Bi(\tau)\right]\Psi_0(F_0,\tau),\tag{37}$$

$$\Psi_0(F_0,\tau)=\frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{F_0-\tau}}-\frac{\pi Bi(F_0)}{2}\exp\left[Bi^2(F_0)(F_0-\tau)^2\right]\Phi^*\left[Bi(F_0)(F_0-\tau)^2\right].\tag{38}$$

Одним из доказательств справедливости найденного соотношения (35) является рассмотрение частного классического случая $Bi(F_0) = Bi = \text{const}$. Для этого случая соотношение (35) автоматически дает классическое решение:

$$\Theta(z,F_0)=\Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{F_0}}\right)-\exp(Biz-Bi^2F_0)\Phi^*\left(\frac{z}{2\sqrt{F_0}}+BiF_0\right),$$

где $\Phi^*(z)=1-\Phi(z)$, $\Phi(z)$ – функция Лапласа.

Можно показать, что при выполнении условия $\left|Bi(F_0)\right|\le M/2$ ряд (36) сходится равномерно при всех $F_0 > 0$ в любом конечном промежутке изменения F_0 и мажорируется рядом:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}M^{n+1}d_{n+1}}{\pi^n}(\sqrt{F_0})^{n+1},\ d_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{\pi^{-1/2}2^{(n+1/2)}}{(n+1)!!},\ n=2k+1,\\[2ex] \dfrac{2^{(n+1/2)}}{(n+1)!!},\ n=2k,\end{cases}$$

сходимость которого при всех $F_0 > 0$ легко проверить по признаку Даламбера. В качестве численного примера возьмем $Bi(F_0) = \exp(-F_0)$ и выпишем ряд последовательных приближений для $\Theta(0, F_0)$ из (36):

$$\Theta_0(0,F_0)=\Theta_1(F_0),$$

$$\Theta_1(0,F_0)=\int_0^{F_0}\Theta_2(F_0,\tau)\Theta_1(\tau)d\tau,$$

$$\Theta_2(0,F_0)=\int_0^{F_0}\Theta_2(F_0,\tau)d\tau\int_0^{\tau}\Theta_2(\tau,\tau_1)\Theta_1(\tau_1)d\tau_1.$$

На рисунке приведены результаты численного счета приближений температурной функции $\Theta(z,\ F_0)$: $\Psi_1=\Theta_1(z,F_0)$, $\Psi_2=\Theta_1(z,F_0)+\Theta_2(z,F_0)$, $\Psi_3=\Theta_1(z,F_0)+\Theta_2(z,F_0)+\Theta_3(z,F_0)$ и т.д., рассчитанных в зависимости от критерия F_0 для точек: (а) $z=0.707$, (б) $z=2$. Из рисунка видно, что графики для первого и второго приближения охватывают сверху и снизу – «берут в клещи» (автор), график для третьего приближения, а графики для второго и третьего приближения охватывают снизу и сверху график для четвертого приближения и т.д., что свидетельствует о достаточно быстрой сходимости процесса итерации для $\Theta(z,\ t)$, так что с достаточной для практики точностью можно ограничиться третьим приближением. Что касается сферических координат, то этот случай сводится к рассмотренному в декартовых координатах с помощью подстановки $W(z,F_0)=z\Theta(z,F_0)$.

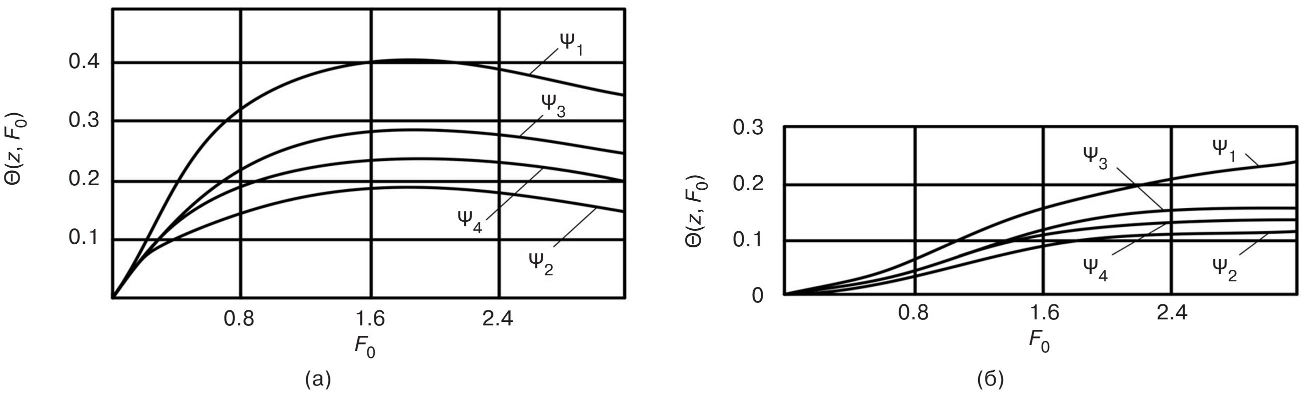

Рисунок. Приближения температурной функции $\Theta(z,\ F_0)$ в зависимости от F_0 в точках: (а) $z=0.707$, (б) $z=2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлено развитие метода расщепления обобщенного интегрального преобразования Фурье применительно к нахождению точного аналитического решения температурной задачи сложного теплообмена – при произвольной зависимости от времени коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды в обобщенных координатах. Метод распространен на декартовы, цилиндрические и сферические координаты. Полученные результаты являются новыми в аналитической теплофизике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э.М. *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел.* М.: Высшая школа; 2001. 549 с. ISBN 5-06-004091-7
2. Аттетков А.В., Волков И.К. Формирование температурных полей в области, ограниченной изнутри цилиндрической поверхностью. *Вестник МГТУ им. Баумана. Серия Машиностроение.* 1999;1:49–56.
3. Волков И.К., Канатников А.Н. *Интегральное преобразование и операционное исчисление.* М.: Изд-во МГТУ им. Баумана; 1996. 228 с. ISBN 5-7938-1273-9
4. Лыков А.В. *Теория теплопроводности*. М.: Высшая школа; 1967. 600 с.
5. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. *Термоупругость тел при переменных коэффициентах теплообмена.* Киев: Наукова Думка; 1977. 159 с.

6. Карслоу Г.С., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел:* пер. с англ. М.: Наука; 1964. 487 с.
7. Формалев В.Ф. *Уравнения математической физики*. М.: URSS; 2021. 648 с. ISBN 978-5-9710-8380-1
8. Новиков В.С. Аналитические методы теории переноса. *Промышленная теплотехника*. 1989;11(5):11–54.
9. Кудинов И.В., Кудинов В.А. *Аналитические решения параболических и гиперболических уравнений тепломассопереноса*. М.: Инфра-М; 2013. 391 с. ISBN 978-5-16-006724-7
10. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М.: Наука; 1967. 736 с.
11. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели термомеханики*. М.: Физматлит; 2002. 168 с. ISBN 5-9221-0321-0
12. Кирсанов Ю.А. *Моделирование теплофизических процессов*. СПб.: Политехника; 2022. 229 с. ISBN 978-5-7325-1192-5. https://doi.org/10.25960/7325-1192-5
13. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности. *Инженерно-физический журнал*. 2015;88(2):393–408.
14. Савельева Ю.И. Двойственная вариационная модель процесса теплопроводности, учитывающая пространственную нелокальность. *Вестник МГТУ им. Баумана. Естественные науки.* 2022;5:45–61. http://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61
15. Карташов Э.М. Развитие модельных представлений термической реакции вязкоупругих тел на температурное поле. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):80–90. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90
16. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии. *Теплофизика и аэромеханика*. 2017;24(6):929–935.

REFERENCES

1. Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* (*Analytical Methods in the Theory of Thermal Conductivity of Solids*). Moscow: Vysshaya shkola; 2001. 549 p. (in Russ.). ISBN 5-06-004091-7
2. Attetkov A.V., Volkov I.K. Formation of temperature fields in the region internally restricted by cylindrical hollow. *Vestnik MGTU im. Baumana. Seriya Mashinostroenie = Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Mechanical Engineering.* 1999;1:49–56 (in Russ.).
3. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. *Integral'noe preobrazovanie i operatsionnoe ischislenie* (*Integral Transformation and Operational Calculus*). Moscow: Bauman Press; 1996. 228 p. (in Russ.). ISBN 5-7938-1273-9
4. Lykov A.V. *Teoriya teploprovodnosti* (*Theory of Thermal Conductivity*). Moscow: Vysshaya shkola; 1967. 600 p. (in Russ.).
5. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. *Termouprugost' tel pri peremennykh koehffitsientakh teploobmena* (*Thermoelasticity of Bodies with Variable Heat Transfer Coefficients*). Kiev: Naukova Dumka; 1977. 159 p. (in Russ.).
6. Carslow H.S., Jaeger J.C. *Teploprovodnost' tverdykh tel* (*Conduction of Heat in Solids*): transl. from Engl. Moscow: Nauka; 1964. 487 p. (in Russ.).
[Carslow H.S., Jaeger J.C. *Conduction of Heat in Solids.* Oxford: Clarendon Press; 1959. 520 p.]
7. Formalev V.F. *Uravneniya matematicheskoi fiziki* (*Equations of Mathematical Physics*). Moscow: URSS; 2021. 648 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-8380-1
8. Novikov V.S. Analytical methods of transfer theory. *Promyshlennaya teplotekhnika = Industrial Heat Engineering*. 1989;11(5):11–54 (in Russ.).
9. Kudinov I.V., Kudinov V.A. *Analiticheskie resheniya parabolicheskikh i giperbolicheskikh uravnenii teplomassoperenosa* (*Analytical Solutions of Parabolic and Hyperbolic Heat and Mass Transfer Equations*). Moscow: Infra-M; 2013. 391 p. (in Russ.). ISBN 978-5-16-006724-7
10. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'tseva N.N. *Lineinye i kvazilineinye uravneniya parabolicheskogo tipa* (*Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*). Moscow: Nauka; 1967. 736 p. (in Russ.).
11. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli termomekhaniki* (*Mathematical Models of Thermomechanics*). Moscow: Fizmatlit; 2002. 168 p. (in Russ.). ISBN 5-9221-0321-0
12. Kirsanov Yu.A. *Modelirovanie teplofizicheskikh protsessov* (*Modeling of Thermophysical Processes*). St. Petersburg: Politekhnika; 2022. 230 p. (in Russ.). ISBN 978-5-7325-1192-5. https://doi.org/10.25960/7325-1192-5
13. Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical Simulation of the Locally Nonequilibrium Heat Transfer in a Body with Account for its Nonlocality in Space and Time. *J. Eng. Phys. Thermophy.* 2015;88(2):406–422. https://doi.org/10.1007/s10891-015-1206-6
[Original Russian Text: Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical Simulation of the Locally Nonequilibrium Heat Transfer in a Body with Account for its Nonlocality in Space and Time. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal.* 2015;88(2):393–408 (in Russ.).]
14. Savelyeva Yu.I. Dual variational model of a stady-state thermal conductivity process taking into account spatial non-locality. *Vestnik MGTU im. Baumana. Estestvennye nauki = Herald of the Bauman Moscow State University. Series Natural Sciences.* 2022;5:45–61 (in Russ.). http://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-5-45-61
15. Kartashov E.M. Development of model representations of the thermal response of viscoelastic bodies to a temperature field. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):80–90 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90

16. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.* 2017;24(6):901–907. https://doi.org/10.1134/S0869864317060087
[Original Russian Text: Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Teplofizika i Aeromekhanika*. 2017;24(6):929–935 (in Russ.).]

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, д.ф.-м.н., Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, Почетный работник науки и техники Российской Федерации, Почетный профессор МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Золотой медали Академии наук Беларуси по теплофизике, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, https://orcid.org/0000-0002-7808-4246

About the Author

Eduard M. Kartashov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Honorary Professor of the Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Laureate of the Golden Medal of the Academy of Sciences of Belarus in Thermophysics, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, https://orcid.org/0000-0002-7808-4246