

УДК 654.1

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-47-62>

EDN EYOGWG



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Максимально правдоподобные оценки угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках различной конфигурации

О.В. Болховская[@]

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, 603950 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: obol@rf.unn.ru

• Поступила: 02.04.2025 • Доработана: 23.05.2025 • Принята к опубликованию: 02.10.2025

Резюме

Цели. Целью работы является исследование свойств максимально правдоподобных (МП) оценок углов прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках, разработка эффективных алгоритмов нахождения МП-оценок и определение точных значений пороговых отношений сигнал/шум, ниже которых возникают аномально большие ошибки, существенно превышающие теоретически минимальные значения, определяемые границами Крамера – Рао.

Методы. Теория оптимального приема сигналов, численное моделирование системы обработки сигналов в многоэлементных антенных решетках на основе разработанных алгоритмов нахождения МП-оценок, сравнение среднеквадратичных ошибок полученных оценок с теоретически минимальными границами Крамера – Рао, найденными аналитически.

Результаты. В широком интервале значений отношений сигнал/шум выполнено численное исследование характеристик МП-оценок угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных линейных и круговых антенных решетках. Предложена методика определения с высокой точностью пороговых значений отношений сигнал/шум, ниже которых возникают аномально большие ошибки измерений. С помощью численного моделирования показано, что когерентная и некогерентная обработка сигналов дают одинаковые предельно достижимые точности при одинаковых отношениях сигнал/шум, превышающих пороговые значения. В то же время, на величину порога существенно влияют вид полезного сигнала и метод его обработки. Выявлены общие закономерности между этими пороговыми значениями, конфигурациями антенных решеток, типом обрабатываемого сигнала и используемым алгоритмом оценивания.

Выводы. Полученные численные и аналитические результаты дают возможность выработать рекомендации по выбору конфигураций многоэлементных антенных решеток и основных параметров систем высокоточного пеленгования источников излучения различных сигналов, что позволит избежать возникновения аномально больших ошибок измерений. Результаты могут быть использованы непосредственно при расчете характеристик проектируемых систем.

Ключевые слова: многоэлементные антенны, оценка угла прихода сигнала, точность оценивания, граница Крамера – Рао, пороговые значения отношений сигнал/шум

Для цитирования: Болховская О.В. Максимально правдоподобные оценки угла прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных антенных решетках различной конфигурации. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):47–62. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-47-62>, <https://www.elibrary.ru/EYOGWG>

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Maximum likelihood estimates of the angle-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays of various configurations

Olesya V. Bolkhovskaya[@]

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, 603950 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: obol@rf.unn.ru

• Submitted: 02.04.2025 • Revised: 23.05.2025 • Accepted: 02.10.2025

Abstract

Objectives. The purpose of this work is to study in detail the properties of maximum likelihood (ML) estimates of the angles-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays, to develop effective algorithms for finding ML estimates and to determine the exact values of threshold signal-to-noise ratios (SNR), below which abnormally large errors occur significantly in excess of the theoretically minimum values determined by the Cramér–Rao bounds.

Methods. The methods used include: the theory of optimal signal detection; intensive numerical simulation of the signal processing system in multielement antenna arrays based on the developed algorithms for finding ML estimates; and comparison of the standard errors of the estimates obtained by means of the theoretically minimal analytically established Cramér–Rao bounds.

Results. Numerical study of the characteristics of ML estimates of the direction of arrival for deterministic and random signals was performed over a wide range of SNRs in multielement linear and circular antenna arrays. The study proposes a method for high-precision determination of threshold SNR values, below which anomalously large measurement errors occur. Numerical simulations demonstrate that coherent and incoherent signal processing yield the same ultimately achievable accuracy at the same SNR values above the threshold. At the same time, the threshold value is significantly influenced by the type of signal and the processing method. The general relationships between these threshold values, antenna array configurations, the type of signal processed, and the estimation algorithm used were identified.

Conclusions. The numerical and analytical results obtained allow recommendations to be developed relating to the choice of multielement antenna arrays configurations and the main parameters of systems for high-precision bearing of radiation sources of various signals. These enable abnormally large measurement errors to be avoided. The results can be directly utilized in the calculation of characteristics of systems under design.

Keywords: multielement antennas, estimation of the signal arrival angle, estimation accuracy, Cramér–Rao lower bound, CRLB, thresholds of signal-to-noise ratio

For citation: Bolkhovskaya O.V. Maximum likelihood estimates of the angle-of-arrival of deterministic and random signals in multielement antenna arrays of various configurations. *Russian Technological Journal*. 2025;13(6):47–62. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-6-47-62>, <https://www.elibrary.ru/EYOGWG>

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Задача оптимального обнаружения и оценивания направления на источник сигнала, находящийся в дальней зоне многоэлементной антенной решетки (АР), возникает во многих областях, например, в радиолокации, радиосвязи, гидролокации, гидроакустике, навигации, сейсмологии и радиоастрономии. В силу большой практической значимости решению этой задачи при различных предположениях о временной структуре сигнала, геометрии АР, параметрах волнового фронта, количестве источников излучения и т.д., посвящено большое число публикаций, например, [1–8]. Среди имеющихся в этой области исследований можно также выделить ряд строгих математических работ, в которых при различных предположениях найдены теоретические пределы для оценок угла прихода полезного сигнала, основанные на максимально правдоподобном (МП) подходе [9–16].

Основная причина широкого использования метода максимального правдоподобия в общей теории оптимального оценивания параметров сигналов заключается в том, что при определенных условиях регулярности функции правдоподобия, больших отношениях сигнал/шум и больших объемах выборки максимально правдоподобные оценки (МП-оценки) являются асимптотически несмещенными, и их дисперсии достигают теоретически минимальной величины, определяемой нижней границей Крамера – Рао (Cramér–Rao low bound, CRLB) [17, 18].

В то же время известно, что при оценивании параметров сигналов МП-методом в области малых отношений сигнал/шум ниже некоторого порогового значения возникают аномально большие ошибки, существенно превышающие CRLB. Следует отметить, что пороговый эффект в теории МП-оценивания был обнаружен достаточно давно. Описание и первоначальное исследование этого эффекта выполнено в ряде классических монографий, посвященных теории оптимального оценивания параметров сигналов, например, в [19, 20].

Попытки создания аналитического аппарата для анализа точности МП-оценок параметров сигналов

при малых отношениях сигнал/шум сделаны в известных математических работах [21–23], в которых были найдены и исследованы более точные нижние границы для дисперсий МП-оценок в области малых отношений сигнал/шум. Наиболее полный обзор подходов, используемых в этих работах, и полученных в них результатов можно найти в [13, 14, 24]. К сожалению, проведенные исследования не увенчались крупными прорывами в этой области в силу большой сложности аналитического описания возникающих при этом существенно нелинейных задач, специфических для каждого сценария построения системы оценивания и реализации алгоритма нахождения МП-оценок.

Несмотря на это, в силу большой практической важности общей задачи повышения точности оценивания параметров сигналов, изучение пороговых эффектов и методов снижения пороговых значений отношений сигнал/шум, при которых начинают возникать аномально большие ошибки, продолжает оставаться актуальным. Это следует из ряда научных статей зарубежных и российских авторов, опубликованных в последние годы по этой тематике [25–32].

Одним из перспективных методов исследования поведения МП-оценок в области малых и пороговых отношений сигнал/шум является прямое численное моделирование систем обработки сигналов [14]. Современная вычислительная техника позволяет провести достаточно большое количество численных экспериментов по обработке сигналов при разных значениях отношений сигнал/шум, определить с высокой точностью сами пороговые значения и достижимые точности МП-оценок угла прихода в области малых значений отношений сигнал/шум для различных конфигураций многоэлементных АР и видов принимаемых сигналов [15, 16, 33–40].

В представленной статье выполнено детальное численное исследование точности МП-оценок углов прихода детерминированных и случайных сигналов в многоэлементных АР. Анализ проведен для наиболее распространенных конфигураций эквидистантных АР – линейной и круговой с различным числом элементов.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ И СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотрим задачу оценивания угла прихода θ сигнала с плоским волновым фронтом от источника, находящегося в дальней зоне, многоэлементной АР с линейной и круговой конфигурацией. Будем полагать, что расстояние d между антенными элементами в обоих случаях составляет половину длины волны ($\lambda/2$). На рис. 1 изображены схемы приема сигналов рассматриваемыми АР и соответствующие им диаграммы направленности.

Будем полагать, что АР состоит из M элементов и для них выполняется условие узкополосности, т.е. время распространения сигнала на апертуре решетки много меньше времени корреляции комплексной амплитуды сигнала. Тогда комплексный вектор отсчетов наблюдаемых сигналов $\mathbf{x}[n] = (x_1[n], \dots, x_M[n])^T$ размерности M можно записать в виде:

$$\mathbf{x}[n] = a[n]\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi}[n], \quad (1)$$

где $a[n]$ – комплексная амплитуда полезного сигнала, излучаемого источником, одинаковая на всех элементах АР; $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_M)^T$ – неизвестный вектор плоского волнового фронта (вектор-фазор) принимаемого полезного сигнала, зависящий от угла прихода сигнала по отношению к нормали к апертуре антенны θ ; знак «Т» означает транспонирование; $\boldsymbol{\xi}[n] = (\xi_1[n], \dots, \xi_M[n])^T$ – комплексный гауссовский вектор независимых собственных шумов в антенных элементах с нулевыми средними значениями и дисперсиями σ^2 ; $\boldsymbol{\xi}[n] \sim CN(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$, где n – дискретные моменты времени взятия выборок; CN – комплексное нормальное распределение; \mathbf{I} – единичная матрица.

Предполагается, что оценивание угла прихода сигнала осуществляется на основании обработки N отсчетов наблюдаемого вектора $\mathbf{x}[n]$, $n = 1 - N$. Далее мы будем рассматривать две наиболее часто используемые модели излучаемого источником сигнала $a[n]$:

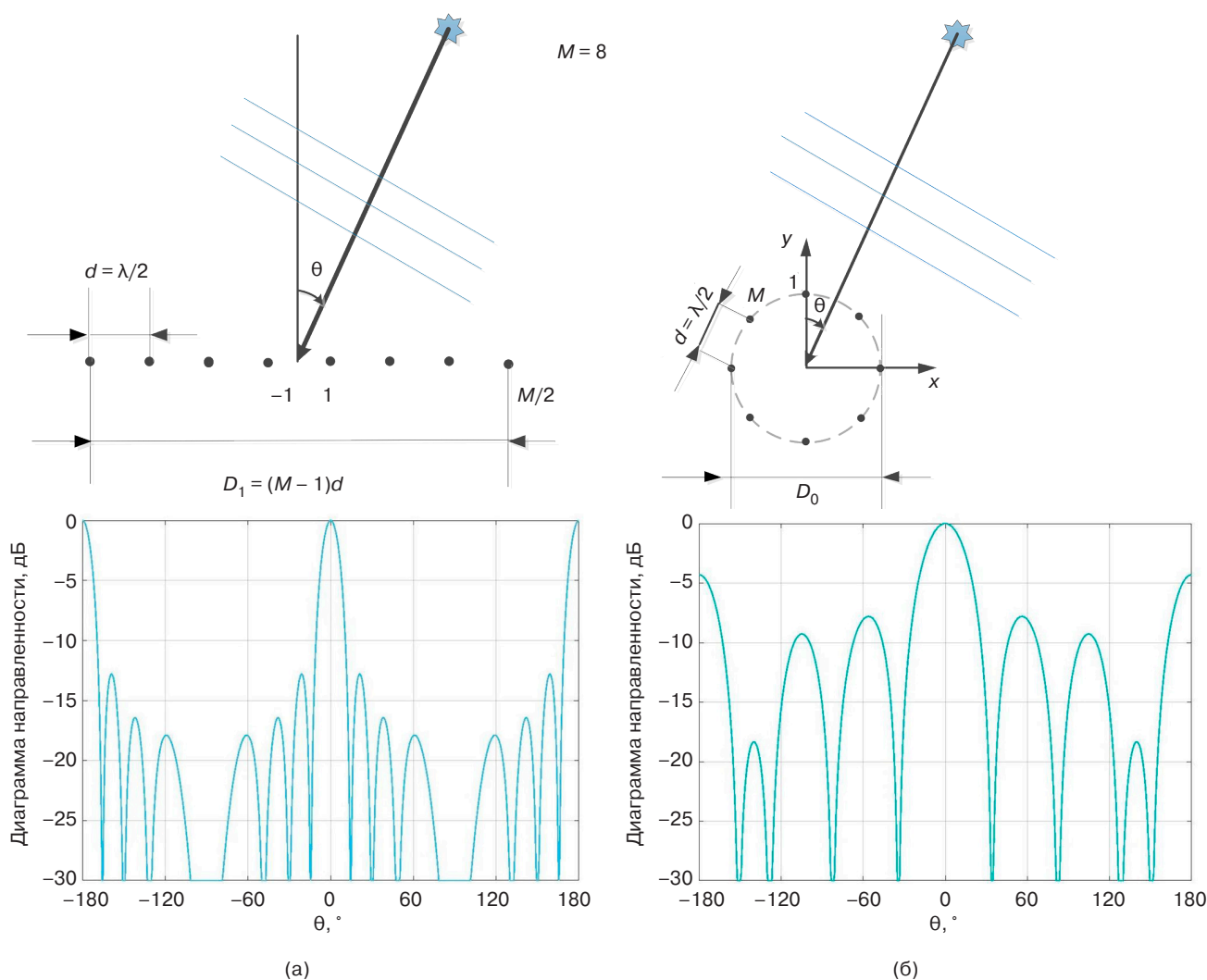


Рис. 1. Примеры схем приема сигналов M -элементными эквидистантными АР и соответствующие им диаграммы направленности для $M = 8$: (а) линейной АР с апертурой D_1 , (б) круговой АР с апертурой D_0

Детерминированный известный сигнал.

В этом случае предполагается, что $a[n]$ – априори известная на приемнике функция времени, выражающая закон модуляции полезного сигнала в момент времени n . Эта модель, например, достаточно хорошо описывает случай определения угла прихода сигнала мобильного устройства на базовую станцию, передающего обусловленные стандартом преамбулы в системах сотовой связи или беспроводного широкополосного доступа в Интернет (Wi-Fi) [10, 41, 42].

Случайный неизвестный сигнал. В этом случае предполагается, что $a[n]$ – комплексный стационарный гауссовский сигнал с некоррелированными отсчетами, имеющий нулевое среднее значение $\langle a[n] \rangle = 0$, где знак $\langle \cdot \rangle$ означает усреднение по статистическому ансамблю, и неизвестную мощность $v = \langle |a^2[n]| \rangle$. Эта модель адекватно описывает случай определения угла прихода сигнала от источника с неизвестными характеристиками, находящегося в дальней зоне АР [11, 29].

После того, как решена задача начального обнаружения узкополосного полезного сигнала в приемной M -элементной АР и принято решение о наличии сигнала, на следующем этапе решается задача оптимального оценивания неизвестных параметров полезного сигнала, в рассматриваемом случае мощности и угла прихода волнового фронта¹.

Для обеих моделей полезного сигнала (детерминированной или случайной) вектор-фазор волнового фронта \mathbf{s} рассматривается как неизвестный детерминированный вектор, зависящий от начальной фазы сигнала, угла прихода сигнала θ и геометрии антенны. Для произвольной геометрии АР его можно записать в виде:

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(\varphi_0, \theta) = e^{j\varphi_0} \cdot [e^{j\varphi_1} \quad e^{j\varphi_2} \quad \dots \quad e^{j\varphi_M}]^T, \quad (2)$$

где φ_0 – начальная фаза сигнала (на одном из элементов АР или в центре антенны), а фаза сигнала на m -м элементе АР определяется как сумма начальной фазы φ_0 и соответствующего набега фазы сигнала φ_m по отношению к начальной фазе. Следует отметить, что такая модель не учитывает возможных

флуктуаций фаз и амплитуд вектора-фазора сигнала, обусловленных средой распространения, положением антенных элементов, угловым положением удаленного источника полезного сигнала, что, например, характерно для моделей гидроакустических каналов [7, 8].

Для оценки неизвестных параметров волнового вектора \mathbf{s} будем использовать метод максимального правдоподобия, согласно которому в качестве оценки следует взять то значение $\hat{\mathbf{s}}$ из области его допустимых значений, для которого функция правдоподобия $W(\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[N]|\mathbf{s})$ для наблюдаемых значений выборки векторов $\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[N]$ принимает наибольшее возможное значение. При условии гауссовского распределения наблюдаемых векторов $\mathbf{x}[n]$ функция правдоподобия может быть представлена в следующем виде:

$$W(\mathbf{x}[1], \dots, \mathbf{x}[N]|\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^{MN} \det(\mathbf{R})^N} e^{-\sum_{i=1}^N (\mathbf{x}[n]-\boldsymbol{\mu})^H \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{x}[n]-\boldsymbol{\mu})}, \quad (3)$$

где знак «H» означает эрмитово сопряжение, $\mathbf{R} = \langle \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \rangle$, $\boldsymbol{\mu}$ – ковариационная матрица и вектор средних значений гауссовского распределения наблюдаемого вектора \mathbf{x} , соответственно.

Для каждой из рассматриваемых моделей полезного сигнала ковариационная матрица и вектор средних значений, входящие в функцию правдоподобия (3), находятся следующим образом:

- для детерминированного полезного сигнала

$$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}, \boldsymbol{\mu} = a[n]\mathbf{s}. \quad (4)$$

Будем считать, что ковариационная матрица вектора собственного шума является единичной, что эквивалентно знанию уровня собственных шумов (калибровке). Это приводит к функции правдоподобия вида

$$W(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = \frac{1}{\pi^{MN}} e^{-\sum_{n=1}^N (\mathbf{x}[n]-a[n]\mathbf{s})^H (\mathbf{x}[n]-a[n]\mathbf{s})}; \quad (5)$$

- для случайного полезного сигнала

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}, \mathbf{R} = \mathbf{I} + v\mathbf{s}\mathbf{s}^H, \quad (6)$$

что приводит к функции правдоподобия вида

$$W(\mathbf{x}|\mathbf{s}) = \pi^{-MN} \det(\mathbf{R})^{-N} e^{-N\text{tr}(\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{R}}))}, \quad (7)$$

где tr – след матрицы.

¹ Согласно строгой статистической теории задача обнаружения и оценивания неизвестных параметров полезного сигнала должна решаться совместно на основе обобщенного отношения правдоподобия (generalized likelihood ratio test, GLRT) [14]. Эффективность GLRT-метода в применении к рассматриваемой здесь задаче была достаточно подробно исследована в статьях авторов [28, 29, 43]. [According to strict statistical theory, the problem of detection and estimation of the unknown parameters of the useful signal should be resolved jointly based on the Generalized Likelihood Ratio Test (GLRT) [14]. The effectiveness of the GLRT method applied to the problem considered here has been thoroughly investigated in [28, 29, 43].]

Для детерминированного сигнала, находя максимум функции правдоподобия (5), несложно показать, что максимально правдоподобная оценка вектора-фазора (без учета априорной информации о плоской форме волнового фронта полезного сигнала) определяется выражением:

$$\hat{\mathbf{s}} = \sum_{n=1}^N a^*[n] \mathbf{x}[n] = \mathbf{y}, \quad (8)$$

где знак «*» означает комплексное сопряжение, а вектор \mathbf{y} представляет собой сигналы на выходах M параллельных корреляторов (или согласованных фильтров), осуществляющих первоначальную оптимальную обработку сигналов с M антенных элементов.

Для случайного сигнала в общем случае произвольного волнового фронта МП-оценка вектора $\hat{\mathbf{s}}$ выражается через первый собственный вектор $\hat{\Psi}_1$, соответствующий максимальному собственному числу $\hat{\lambda}_1$ выборочной ковариационной матрицы сигналов на элементах АР, следующим образом [28]:

$$\hat{\Psi}_1 = \hat{\mathbf{s}} / \sqrt{M}. \quad (9)$$

Однако, когда источник полезного сигнала находится в дальней зоне антенны, его волновой фронт является плоской волной с одинаковой амплитудой сигналов на элементах АР. Для того, чтобы учесть эту важную априорную информацию при нахождении МП-оценки волнового фронта сигнала рассмотрим две основные конфигурации АР – линейную и круговую.

Для линейной эквидистантной АР набеги фаз φ_m относительно ее геометрического центра можно записать как

$$\varphi_m = \Delta\varphi \cdot m = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin(\theta) \cdot m, \quad (10)$$

где $\Delta\varphi$ – набег фаз между соседними элементами.

Когда отсчет набега фаз φ_m ведется от геометрического центра АР и нумерация антенных элементов m осуществляется симметрично относительно этого центра, то для нечетного числа элементов индекс элемента $m = -\frac{M-1}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{M-1}{2}$, а для четного числа элементов $m = -\frac{M-1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{M-1}{2}$.

Для круговой АР набеги фаз φ_m относительно ее геометрического центра определяются как

$$\varphi_m = 2\pi \frac{R}{\lambda} \cos\left(\theta - \frac{2\pi(m-1)}{M}\right), \quad (11)$$

где $m = 1, \dots, M$; R – радиус круговой АР.

Очевидно, что задача оценивания вектора-фазора плоского волнового фронта \mathbf{s} для обеих

конфигураций АР (линейной и круговой) сводится только к оценке начальной фазы и угла прихода полезного сигнала, поэтому МП оценка $\hat{\mathbf{s}}$ находится путем решения задачи максимизации скалярного произведения:

- для детерминированного сигнала между вектором сигналов \mathbf{y} на выходах согласованных фильтров и «пробным» (trial) вектором-фазором плоской волны $\tilde{\mathbf{s}}$, фазы которого определяются выражением (10) для линейной АР и (11) для круговой АР;
- для случайного сигнала между собственным вектором $\hat{\Psi}_1 = \hat{\mathbf{s}} / \sqrt{M}$ и «пробным» (trial) вектором-фазором плоской волны $\tilde{\mathbf{s}}$.

Различные алгоритмы нахождения МП-оценок параметров плоского волнового фронта для линейной АР подробно рассматривались в работах [26, 41, 42] для известного детерминированного сигнала и в [29, 43] для случайного сигнала. В этих работах были предложены эффективные двухэтапные алгоритмы нахождения МП-оценок. При этом на первом этапе находится грубая оценка волнового фронта полезного сигнала путем сканирования сектора пространства возможных углов прихода полезного сигнала. Такое сканирование для эквидистантных АР обычно осуществляется с использованием дискретного преобразования Фурье (ДПФ) от вектора сигналов, наблюдаемых на элементах АР. На втором этапе грубая оценка уточняется путем нахождения поправки к оценке волнового вектора, найденного на первом шаге. При этом используется или регрессионный алгоритм, или итерационный, а круговая АР заменяется на виртуальную линейную неэквидистантную АР [41]. Для удобства сравнения этапы нахождения МП-оценок вектора-фазора плоского волнового фронта детерминированных и случайных сигналов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Этапы нахождения МП оценок вектора-фазора плоского волнового фронта детерминированных и случайных сигналов

Этапы	Детерминированный сигнал	Случайный сигнал
МП оценка в случае произвольного волнового фронта	$\hat{\mathbf{s}} = \sum_{n=1}^N a^*[n] \mathbf{x}[n] = \mathbf{y}$	$\hat{\mathbf{s}} = \sqrt{M} \hat{\Psi}_1$
Грубая оценка в случае плоского волнового фронта (ДПФ с пересемплированием)	$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\varphi_0, \Delta\varphi} \hat{\mathbf{s}}^H \mathbf{y} $	$\hat{\mathbf{s}} = \arg \max_{\varphi_0, \Delta\varphi} \hat{\mathbf{s}}^H \hat{\Psi}_1 $
Уточнение оценки с помощью линейной регрессии	$\hat{\varphi}_m = \varphi_0 + \Delta\varphi(m-1)$	$\hat{\varphi}_m = \varphi_0 + \Delta\varphi(m-1)$

2. ТОЧНОСТЬ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ ВОЛНОВОГО ФРОНТА СИГНАЛОВ

Эффективность разработанных алгоритмов нахождения МП-оценок угла прихода плоского волнового фронта сигнала определялась путем сравнения дисперсий оценок, получаемых в численных экспериментах, с минимально возможными, определяемыми неравенствами Крамера – Рао [11, 13, 14]. При этом в случае детерминированного полезного сигнала при исследовании вопроса о предельно достижимых точностях оценки параметров плоского волнового фронта необходимо рассматривать задачу совместного оценивания начальной фазы и угла прихода сигнала. Поэтому рассмотрим сначала общий случай определения нижних границ Крамера – Рао для произвольного числа оцениваемых параметров, которые удобно записать в виде вектора $\boldsymbol{\eta}$. Тогда дисперсия i -го оцениваемого параметра η_i удовлетворяет неравенству

$$\sigma^2(\hat{\eta}_i) = \left\langle (\hat{\eta}_i - \eta_i)^2 \right\rangle \geq [\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta})]_{ii}, \quad (12)$$

где $\boldsymbol{\eta}$ – вектор оцениваемых параметров, $\hat{\eta}_i$ – оценка i -го параметра, $\langle \cdot \rangle$ – знак усреднения, а $\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta})$ – корреляционная матрица оценок параметров (Cramér–Rao bound, CRB), обратная к информационной матрице Фишера (Fisher information matrix, FIM):

$$\mathbf{CRB}(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{FIM}^{-1}(\boldsymbol{\eta}).$$

В соответствии с общей методологией нахождения границ Крамера – Рао [11] при оценивании точности нескольких параметров (вектора параметров $\boldsymbol{\eta}$) необходимо сначала найти выражение для информационной матрицы Фишера через производные от функции правдоподобия, элементы которой в общем случае выражаются в виде:

$$[\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})]_{i,j} = - \left\langle \left\{ \frac{\partial^2 \ln(W(\mathbf{y}|\boldsymbol{\eta}))}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \right\} \right\rangle. \quad (13)$$

Для модели наблюдений с аддитивным гауссовским шумом (1) выражение для информационной матрицы Фишера записывается в виде [16]:

$$[\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})]_{i,j} = \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\} + 2 \text{Re} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\mu}^H}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \eta_j} \right\}, \quad (14)$$

где $\text{Re}\{\cdot\}$ – действительная часть выражения.

2.1. Детерминированный полезный сигнал

В случае, когда наблюдается детерминированный сигнал с неизвестным волновым фронтом вида (2) в гауссовском шуме, корреляционная матрица шума \mathbf{R} (4) не зависит от оцениваемых параметров φ_0 и θ и поэтому первое слагаемое в выражении (14) будет равно нулю. Для рассматриваемой задачи вектор оцениваемых параметров $\boldsymbol{\eta} = [\theta, \varphi_0]$ и с учетом (4) матрица Фишера (14) может быть представлена в виде:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})_{i,j} = 2N \cdot \text{SNR} \cdot \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta})^H}{\partial \eta_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_j} \right\}, \quad (15)$$

где $\text{SNR} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |a[n]|^2 / \sigma^2$ – отношение сигнал/шум на одном антенном элементе, равное отношению средней мощности принятого полезного сигнала на одном элементе к мощности шума.

Для линейной АР в случае, когда начальная фаза сигнала φ_0 оценивается в геометрическом центре антенны, матрица Фишера (15) становится диагональной и имеет следующий вид [36]:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta}) = 2N \cdot \text{SNR} \times \begin{bmatrix} \left(2\pi \frac{d}{\lambda}\right)^2 \cos^2 \theta \frac{M(M^2-1)}{12} & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Это позволяет легко найти обратную ей корреляционную матрицу для оценок угла прихода и начальной фазы сигнала:

$$\mathbf{C}(\theta, \varphi_0) = \mathbf{FIM}^{-1}(\theta, \varphi_0). \quad (17)$$

У этой матрицы размерности 2×2 недиагональные элементы равны нулю, а диагональные элементы являются минимально возможными дисперсиями оценок угла прихода θ и начальной фазы φ_0 полезного сигнала:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \cdot \frac{1}{N \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M(M^2-1)}, \quad (18)$$

$$\text{CRB}(\varphi_0) = \frac{1}{2N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M}. \quad (19)$$

Для круговой АР в случае, когда фаза сигнала оценивается в геометрическом центре антенны,

матрица Фишера (15) также становится диагональной и записывается в следующем виде [41]:

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta}) = 2N \cdot \text{SNR} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2\pi^2 R_0^2}{\lambda^2} M & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}. \quad (20)$$

Это позволяет легко найти обратную ей корреляционную матрицу оценок угла прихода θ и начальной фазы полезного сигнала φ_0 , диагональные элементы которой равны:

$$\text{CRB}(\theta) = \frac{1}{N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2 / \lambda^2}, \quad (21)$$

$$\text{CRB}(\varphi_0) = \frac{1}{2N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M}, \quad (22)$$

а недиагональные элементы равны нулю.

2.2. Случайный полезный сигнал

В случае, когда полезный сигнал является случайным гауссовским процессом, корреляционная матрица \mathbf{R} наблюдаемого вектора $\mathbf{x}[n]$ зависит от оцениваемых параметров φ_0 и θ , а вектор средних значений $\boldsymbol{\mu}$ равен нулю (6). Поэтому первое слагаемое в выражении для матрицы Фишера (14) не равно нулю, а второе слагаемое равно нулю.

Однако оценивание начальной фазы φ_0 в векторе-фазоре не имеет смысла, т.к. комплексная амплитуда $a[n]$ случайного полезного сигнала $\mathbf{s}[n] = a[n]\mathbf{s}$ на каждом отсчете имеет случайную фазу, равномерно распределенную в интервале $[-\pi, \pi]$. В этом случае нахождение первого слагаемого в выражении (14):

$$\mathbf{FIM}(\boldsymbol{\eta})_{i,j} = \text{tr} \left\{ \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_i} \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta_j} \right\} \quad (23)$$

приводит к тому, что все элементы матрицы Фишера, кроме одного, оказываются равными нулю. Поэтому в рассматриваемом случае можно оценить только один параметр – угол прихода полезного сигнала θ . С учетом выражения (6) для корреляционной матрицы \mathbf{R} можно найти ее обратную матрицу

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I} - \frac{\nu}{1 + \nu M} \mathbf{s} \mathbf{s}^H \quad (24)$$

и, подставляя (6) и (24) в первое слагаемое формулы (14), получить выражение для нужного элемента матрицы Фишера:

$$\begin{aligned} \text{FIM}(\theta) &= \frac{2 \cdot N \cdot M \cdot \sigma_s^4}{\sigma_n^2 (\sigma_n^2 + M \sigma_s^2)} \times \\ &\times \left(\frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})^H}{\partial \theta} \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta} - \frac{1}{M} \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})^H}{\partial \theta} \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta}) \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})^H \frac{\partial \mathbf{s}(\boldsymbol{\eta})}{\partial \theta} \right) = \\ &= \left(2\pi \frac{d}{\lambda} \right)^2 \cos^2 \theta \frac{M(M^2 - 1)}{12}. \end{aligned} \quad (25)$$

где σ_s^2 и σ_n^2 – дисперсии сигнала и шума соответственно.

Для линейной АР, подставляя в выражение для матрицы Фишера (25) вектор-фазор с фазами, определяемыми формулой (10), легко найти нижнюю границу для дисперсии оценки угла прихода в виде:

$$\begin{aligned} \text{CRB}(\theta) = \text{FIM}^{-1}(\theta) &= \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \times \\ &\times \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot \text{SNR}^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M^2 (M^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Для круговой АР нижнюю границу для дисперсии оценки угла прихода случайного сигнала можно найти аналогичным образом. Для этого следует подставить в выражение для матрицы Фишера (25) вектор-фазор с фазами, определяемыми формулой (11). В результате получим

$$\text{CRB}(\theta) = \text{FIM}^{-1}(\theta) = \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot M^2 \cdot \text{SNR}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2 / \lambda^2}. \quad (27)$$

Для удобства сравнения все найденные нижние границы для дисперсий оценок угла прихода сигнала линейной и круговой АР приведены в табл. 2 где $\text{CRB}(\theta)$ обозначены соответственно буквой L для линейной АР, и буквой C – для круговой, а индексы det и rand соответствуют детерминированному и случайному сигналам соответственно.

Из приведенных в табл. 2 формул следует, что отношения нижних границ Крамера – Рао для дисперсий оценок угла прихода для случайного и детерминированного сигналов оказывается одинаковым для линейной и для круговой АР, и равными

$$\frac{L_{\text{rand}}}{L_{\text{det}}} = \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{M \cdot \text{SNR}} = \frac{C_{\text{rand}}}{C_{\text{det}}}. \quad (28)$$

Причем из выражения (28) следует, что при увеличении отношения сигнал/шум и числа антенных элементов (при произведении $M \cdot \text{SNR} \gg 1$) границы Крамера – Рао для дисперсий оценок угла прихода случайного и детерминированного сигналов становятся одинаковыми. Так, в случае $M = 8$ разница между CRB для случайного

Таблица 2. Итоговые формулы для CRB(θ) для различных типов сигнала и конфигурация AP

Решетка	Детерминированный полезный сигнал	Случайный полезный сигнал
Линейная AP	$L_{\text{det}} = \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \cdot \frac{1}{N \cdot \text{SNR} \cdot \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M(M^2 - 1)}$	$L_{\text{rand}} = \frac{1}{(2\pi d/\lambda)^2} \cdot \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot \text{SNR}^2 \cos^2 \theta} \cdot \frac{6}{M^2(M^2 - 1)}$
Круговая AP	$C_{\text{det}} = \frac{1}{N \cdot \text{SNR}} \cdot \frac{1}{M \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2/\lambda^2}$	$C_{\text{rand}} = \frac{1 + M \cdot \text{SNR}}{N \cdot M^2 \cdot \text{SNR}^2 \cdot 4\pi^2 \cdot R_0^2/\lambda^2}$

Примечание. Значения границ Крамера – Рао в табл. 2 даны для произвольного радиуса круговой антенны. В случае, когда расстояние между соседними элементами круговой антенны равно половине длины волны, отношение $R_0^2/\lambda^2 = \frac{1}{16\sin^2(\pi/M)}$.

и детерминированного сигналов становится меньше 10% уже при $\text{SNR} > 0.8$ дБ, а в случае $M = 16$ – при $\text{SNR} > -2.2$ дБ, что также подтверждается результатами численных экспериментов, приведенными на рис. 2 и рис. 3 в следующем разделе.

3. ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК АЛГОРИТМОВ, РЕАЛИЗУЮЩИХ МП ОЦЕНКИ УГЛА ПРИХОДА ПОЛЕЗНОГО СИГНАЛА

Сравнительный анализ характеристик рассмотренных выше алгоритмов оценивания углов прихода полезного сигнала был проведен на примерах линейных и круговых AP с разным числом антенных элементов в условиях однолучевого канала с аддитивным гауссовским шумом (1). Для всех конфигураций AP расстояние между антенными элементами бралось равным половине длины волны ($d = \lambda/2$). В качестве полезного детерминированного сигнала $a[n]$ использовался сигнал с псевдослучайной двоичной фазовой манипуляцией (0, π) с постоянной амплитудой, известный на приемнике, а в качестве полезного случайного сигнала – комплексная гауссовская последовательность независимых отсчетов такой же длины N .

Как отмечалось выше, в работах [9, 16] была теоретически доказана неэффективность алгоритмов МП-оценивания угла прихода полезного случайного сигнала при конечном объеме выборки N , что приводит к недостижимости границы Крамера – Рао только за счет увеличения величины SNR при фиксированном размере выборки. Однако подробные численные исследования этого факта, проведенные в работе [29], показали, что при достаточно больших отношениях сигнал/шум предельные значения дисперсий МП-оценок углов прихода превышают границу Крамера – Рао на относительную величину порядка $\sim 1/(N - 1)$, которой, очевидно, на практике можно пренебречь при больших N . Поэтому,

в представленных ниже численных экспериментах, чтобы избежать учета конечности выборки, объем выборки был выбран достаточно большим ($N = 64$) для обеих моделей полезного сигнала, детерминированной и случайной.

Для определения пороговых уровней отношений сигнал/шум SNR_{th} (ниже которых возникают anomalously большие ошибки) предложена следующая методика. Пороговые значения SNR_{th} находились как значения, при которых среднее квадратичное отклонение (СКО) оценок углов прихода полезного сигнала превышали теоретические нижние границы Крамера – Рао (CRLB) на заданное количество процентов. Несомненным достоинством данной методики является то, что нижние границы Крамера – Рао легко рассчитываются по аналитическим формулам, приведенным в табл. 2 для линейной и круговой AP. Уровень превышения теоретических значений выбран равным 10% на основе результатов предварительных численных экспериментов, показывающих, что с одной стороны при $\text{SNR} < \text{SNR}_{\text{th}}$ происходит быстрый, почти скачкообразный, рост СКО оценок, а с другой стороны, измерение такого 10%-го смещения возможно выполнить с большой точностью порядка 1% при разумном числе экспериментов (порядка 1 млн).

При этом исследовались среднее квадратичные ошибки МП-оценок углов прихода плоского волнового фронта, получаемых с применением алгоритмов, описанных в разделе 2 и приведенных в табл. 1 для обеих моделей полезного сигнала. Для каждого алгоритма, конфигурации AP и модели сигнала СКО оценок углов прихода сигналов находились по $2 \cdot 10^5$ численным экспериментам, в каждом из которых обрабатывался сигнал длиной в N отсчетов ($N = 64$).

Для линейных AP (uniform linear array, ULA) на рис. 2 приведены графики среднее квадратичных ошибок $\sigma_{\sin \theta}$ оценок синусов углов прихода для детерминированного и случайного сигналов

в зависимости от отношения сигнал/шум, измеряемого на одном антенном элементе. При этом угол прихода полезного сигнала задавался в каждом эксперименте случайным и равномерно распределенным в интервале $\pm 60^\circ$. Штриховыми линиями соответствующих цветов изображены нижние границы Крамера – Рао для детерминированного сигнала в соответствии с формулой (18) и случайного сигнала в соответствии с формулой (26).

Из представленных на рис. 2 результатов видно, что СКО оценок для обеих моделей сигналов при увеличении SNR стремятся к одинаковым предельным значениям, зависящим от числа антенных элементов M . При удвоении числа антенных элементов СКО оценок уменьшается приблизительно в 2.83 раза, что находится в хорошем соответствии с аналитическими выражениями, приведенными в табл. 2. Интересно также отметить, что для того, чтобы добиться такого же уменьшения СКО оценок при фиксированном числе антенных элементов M , необходимо увеличить отношение сигнал/шум приблизительно на 10 дБ. В то же время пороговые значения сигнала/шум SNR_{th} , при превышении которых СКО оценок практически достигают границ Крамера – Рао, существенно зависят от вида полезного сигнала. Для детерминированных сигналов пороговые значения сигнала/шум оказываются существенно меньше, чем для случайных сигналов.

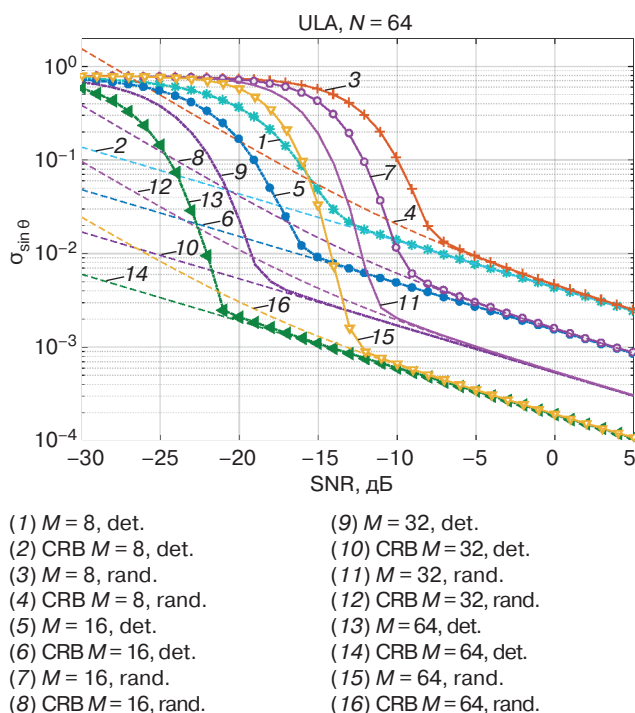


Рис. 2. СКО оценок синусов углов прихода для детерминированного (det) и случайного (rand) сигналов в зависимости от отношения сигнал/шум для линейной АР при разном числе антенных элементов M

Для круговых АР (uniform circular array, UCA) на рис. 3 приведены аналогичные графики среднеквадратичных ошибок σ_θ оценок углов прихода для детерминированного и случайного сигналов в зависимости от отношения сигнал/шум на одном антенном элементе. При этом угол прихода полезного сигнала задавался случайным равномерно распределенным в интервале от 0° до $180^\circ/M$ (в силу радиальной M симметрии задачи это распределение эквивалентно равномерному распределению от 0° до 360°). Штриховыми линиями соответствующих цветов изображены границы Крамера – Рао для детерминированного сигнала в соответствии с формулой (21) и случайного сигнала в соответствии с формулой (27). Из представленных результатов видно, что для круговой АР, как и для линейной АР, СКО оценок углов для обеих моделей сигналов при увеличении SNR стремятся к одинаковым предельным значениям, зависящим от числа антенных элементов M , а пороговые значения сигнала/шум SNR_{th} , при превышении которых СКО оценок практически достигают границ Крамера – Рао, существенно зависят от вида полезного сигнала. При этом для детерминированных сигналов пороговые значения сигнала/шум также оказываются ниже, чем для случайных сигналов.

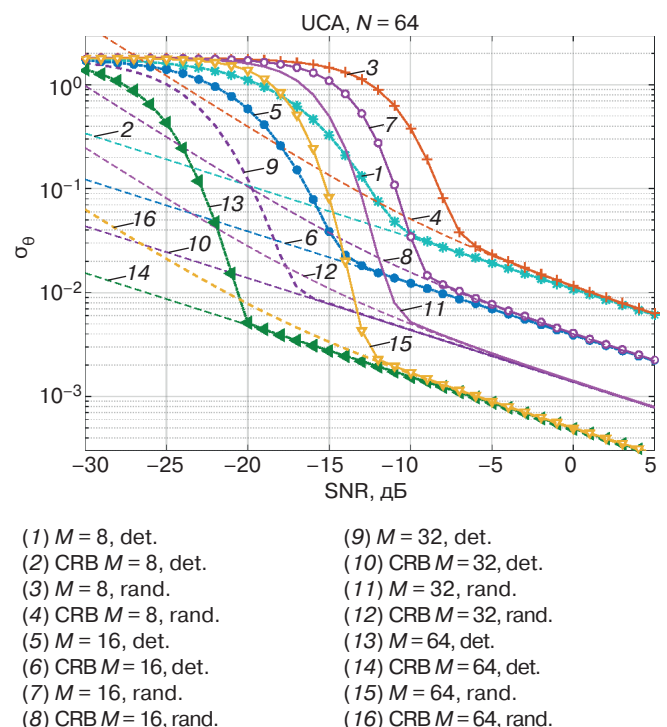


Рис. 3. СКО оценок углов прихода для детерминированного (det) и случайного (rand) сигналов в зависимости от отношения сигнал/шум для круговой АР при разном числе антенных элементов M

Из сравнения двух рассмотренных геометрий АР видно, что поведение зависимостей СКО оценок углов приходов сигналов от числа антенных элементов M и отношения сигнал/шум имеет одинаковый характер в области больших SNR (превышающих SNR_{th}). В то же время, при равном количестве антенных элементов и расстоянии между ними, СКО оценок для линейной АР (в случае нулевого угла прихода сигнала с направления перпендикулярного апертуре АР) оказываются приблизительно в 2.5 раза меньше, чем для круговой. Очевидно, что это связано с приблизительно в 3 раза меньшим размером апертуры круговой АР по сравнению с линейной АР. Однако несложно показать, что это преимущество линейной АР над круговой АР в точности оценивания углов прихода сигнала сохраняется только в секторе $\pm 67^\circ$, при больших углах круговая АР имеет более высокую точность оценивания, чем линейная АР. Кроме того из полученных результатов (аналитических и численных) следует, что точность оценивания круговой АР при больших отношениях сигнал/шум ($\text{SNR} > \text{SNR}_{\text{th}}$) вообще не зависит от углов прихода полезного сигнала.

Во второй серии численных экспериментов для всех рассмотренных выше конфигураций АР и моделей сигналов проведено более детальное исследование достигаемых точностей оценивания углов прихода сигнала в наиболее интересных интервалах значений отношений сигнал/шум вблизи пороговых SNR_{th} . Для этого количество численных экспериментов для каждого SNR вблизи SNR_{th} было увеличено до 10^6 и при нахождении уточненных

пороговых значений использовалась линейная интерполяция.

Для модели детерминированного полезного сигнала в табл. 3 представлены уточненные значения SNR_{th} для линейной и круговой АР (даны с точностью до 0.1 дБ), соответствующие им СКО оценок углов прихода $\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$ (даны с точностью до 3 значащих цифр) и предельные нижние границы Крамера – Рао $(\sqrt{L_{\text{det}}}/\sqrt{C_{\text{det}}})$, рассчитанные с помощью аналитических выражений, приведенных в табл. 2. Контрольные величины относительного 10%-го превышения СКО над границами Крамера – Рао $(\delta_{\sin\theta}/\delta_{\sigma\theta})$ приведены в нижней строчке таблицы (даны с точностью до 3 значащих цифр).

Для модели случайного полезного сигнала в табл. 4 аналогичным образом представлены уточненные значения SNR_{th} для линейной и круговой АР, соответствующие им СКО оценок углов прихода $\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$ и предельные нижние границы Крамера – Рао $(\sqrt{L_{\text{rand}}}/\sqrt{C_{\text{rand}}})$, рассчитанные также с помощью формул, приведенных в табл. 2. Контрольные величины относительного 10%-го превышения СКО над границами Крамера – Рао приведены в нижней строчке табл. 4.

Для более наглядного сравнения численных результатов, приведенных в табл. 3 и 4, на рис. 4 на одном графике представлены рассчитанные уточненные пороговые значения отношений сигнал/шум (SNR_{th}) для всех конфигураций АР и моделей полезного сигнала.

Таблица 3. Значения SNR_{th} для линейной и круговой АР для детерминированного сигнала

M	8		16		32		64	
	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA
SNR_{th} , дБ	-13.3	-10.3	-15.5	-13.6	-17.5	-16.8	-20.0	-20.1
$\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$	$2.20 \cdot 10^{-2}$	$3.92 \cdot 10^{-2}$	$9.95 \cdot 10^{-3}$	$2.03 \cdot 10^{-2}$	$4.44 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$2.09 \cdot 10^{-3}$	$5.43 \cdot 10^{-3}$
$\sqrt{L_{\text{det}}}/\sqrt{C_{\text{det}}}$	$2.00 \cdot 10^{-2}$	$3.53 \cdot 10^{-2}$	$9.04 \cdot 10^{-3}$	$1.85 \cdot 10^{-2}$	$4.04 \cdot 10^{-3}$	$9.49 \cdot 10^{-3}$	$1.90 \cdot 10^{-3}$	$4.94 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{\sin\theta}/\delta_{\sigma\theta}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Таблица 4. Значения SNR_{th} для линейной и круговой АР для случайного сигнала

M	8		16		32		64	
	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA	ULA	UCA
SNR_{th} , дБ	-7.3	-6.4	-9.1	-9.0	-10.7	-10.3	-12.2	-12.2
$\sigma_{\sin\theta}/\sin\theta$	$1.42 \cdot 10^{-2}$	$3.07 \cdot 10^{-2}$	$5.90 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$2.37 \cdot 10^{-3}$	$5.76 \cdot 10^{-3}$	$9.55 \cdot 10^{-4}$	$2.45 \cdot 10^{-3}$
$\sqrt{L_{\text{rand}}}/\sqrt{C_{\text{rand}}}$	$1.29 \cdot 10^{-2}$	$2.79 \cdot 10^{-2}$	$5.36 \cdot 10^{-3}$	$1.35 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-3}$	$5.23 \cdot 10^{-3}$	$8.68 \cdot 10^{-4}$	$2.23 \cdot 10^{-3}$
$\delta_{\sin\theta}/\delta_{\sigma\theta}$	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100	0.100

Из приведенных на рис. 4 графиков можно сделать важные практические выводы. Во-первых, пороговые значения отношений сигнал/шум сильно зависят от вида принимаемого сигнала, так для детерминированных сигналов они оказываются приблизительно на 6–7 дБ ниже, чем для случайных сигналов. Во-вторых, пороговые значения отношений сигнал/шум очень слабо зависят от конфигурации АР и при большом числе антенных элементов ($M > 16$) практически совпадают для рассмотренных в работе линейных и круговых АР. При этом при удвоении количества антенных элементов значения SNR_{th} уменьшаются приблизительно на 2 дБ.

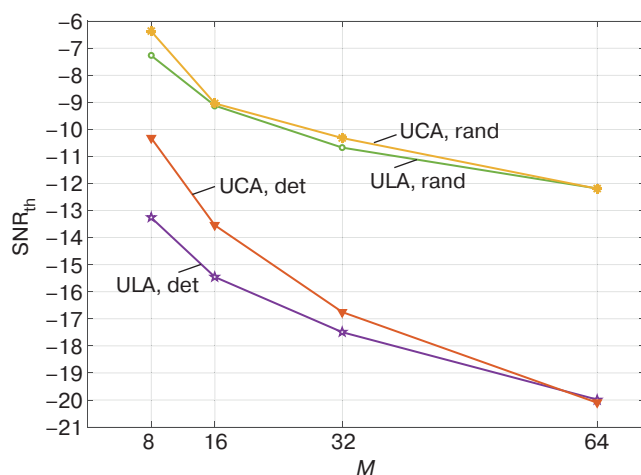


Рис. 4. Зависимости уточненных пороговых значений отношений сигнал/шум (SNR_{th}) от числа антенных элементов для всех конфигураций АР и моделей полезного сигнала

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведено численное исследование точности МП-оценок угла прихода сигнала с плоским волновым фронтом, принимаемого линейной и круговой АР. Проведен анализ двух моделей полезного сигнала – детерминированного с априори известной формой и случайного – гауссовского шума с некоррелированными отсчетами.

В ходе численного эксперимента показано, что, в соответствии с теорией оптимальных оценок,

при увеличении отношения сигнал/шум и больших объемах выборки среднеквадратичные ошибки МП-оценок для обеих моделей сигнала стремятся к одинаковым теоретически предельным значениям (границам Крамера – Рао), зависящим только от числа антенных элементов M и конфигурации АР.

В работе предложен метод строгого определения пороговых значений отношений сигнал/шум (ниже которых возникают аномально большие ошибки) на основе заданного относительного превышения СКО оценок максимального правдоподобия теоретически предельных нижних границ Крамера – Рао, найденных аналитически. Проведенное численное моделирование позволило найти с высокой точностью такие пороговые значения для детерминированных и случайных моделей сигналов.

Выявлены достаточно простые закономерности между основными характеристиками системы оценивания: геометрией АР, числом антенных элементов, типом обрабатываемого сигнала и используемым алгоритмом. Эти закономерности на основе интерполяции и аппроксимации уже представленных в работе результатов (без проведения дополнительного численного моделирования), позволяют определять пороговые значения отношений сигнал/шум для двух базовых моделей сигналов (детерминированной и случайной) в линейных и круговых АР практически с любым количеством антенных элементов, большим четырех.

Таким образом, одним из основных результатов работы является доказательство с помощью численного моделирования того факта, что когерентная и некогерентная обработка сигналов дает одинаковые предельно достижимые точности при одинаковых отношениях сигнал/шум больше пороговых значений ($\text{SNR} > \text{SNR}_{\text{th}}$). В то же время, вид полезного сигнала и метод его обработки существенно влияют на величину пороговых значений SNR_{th} , ниже которых возникают аномально большие ошибки.

Полученные в работе результаты могут быть практически использованы на начальном этапе проектирования и определения архитектуры систем высокоточного пеленгования и локализации источников излучения различных сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Skolnik M.I. *Radar Handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Professional; 2008. 1328 p.
2. Ширман Я.Д., Манжос В.Н. *Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех*. М.: Радио и связь; 1981. 416 с.
3. Richards M.A. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw-Hill; 2014. 640 p.
4. Vaughan R., Andersen J.B. *Channels, Propagation and Antennas for Mobile Communications*. London: The Institution of Engineering and Technology; 2003. 784 p. <https://doi.org/10.1049/PBEW050E>

5. Sand S., Dammann A., Mensing C. *Positioning in Wireless Communications Systems*. Chichester: John Wiley & Sons; 2014. 280 p.
6. Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Mag.* 1996;13(4):67–94. <https://doi.org/10.1109/79.526899>
7. Dosso S.E., Wilmot M.J. Maximum-likelihood and other processors for incoherent and coherent matched-field localization. *J. Acoust. Soc. Am.* 2012;132(4):2273–2285. <https://doi.org/10.1121/1.4730978>
8. Малеханов А.И., Смирнов А.В. Пространственная обработка частично-когерентных сигналов в больших антенных решетках: анализ, моделирование и оценки возможностей оптимизации. *Известия вузов. Радиофизика*. 2023;66(12):1094–1121. https://doi.org/10.52452/00213462_2023_66_12_1094
9. Stoica P., Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér–Rao bound. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* 1989;37(5):720–741. <https://doi.org/10.1109/29.17564>
10. Li J., Compton R.T. Maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms. *IEEE Trans. Signal Process.* 1993;41(9):2850–2862. <https://doi.org/10.1109/78.236507>
11. Kay S.M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Volume 1. Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1993. 625 p.
12. Viberg M., Ottersten B., Nehorai A. Performance analysis of direction finding with large arrays and finite data. *IEEE Trans. Signal Process.* 1995;43(2):469–477. <https://doi.org/10.1109/78.348129>
13. Van Trees H.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*. New York, NY: Wiley; 2001. 716 p.
14. Van Trees H.L., Bell K.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing*. Hoboken, NJ: Wiley; 2002. 1480 p.
15. Renaux A., Foster P., Chaumette E., Larzabal P. On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization. *IEEE Trans. Signal Process.* 2006;54(12):4840–4843. <https://doi.org/10.1109/TSP.2006.882072>
16. Renaux A., Forster P., Boyer E., Larzabal P. Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal-to-noise ratio. *IEEE Trans. Signal Process.* 2007;55(5):2358–2364. <https://doi.org/10.1109/TSP.2007.893205>
17. Cramer H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press; 1946. 589 p.
18. Rao C.R. *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: Wiley; 1946. 660 p.
19. Тихонов В.И. *Оптимальный прием сигналов*. М.: Радио и связь; 1983. 320 с.
20. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. *Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех*. М.: Радио и связь; 1986. 264 с.
21. Barankin E.W. Locally best unbiased estimates. *Ann. Math. Statist.* 1949;20(4):477–501. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729943>
22. Bhattacharyya A. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhyā*. 1946;8(1):201–218. URL: <https://www.jstor.org/stable/25047921>
23. Bell K.L., Ephraim Y., Van Trees H.L. Ziv-Zakai lower bounds in bearing estimation. In: *Proceedings of the 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*. 1995 May 9–12; Detroit, MI, USA. IEEE. P. 2852–2855. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.1995.479888>
24. Athley F. Threshold Region Performance of Maximum Likelihood Direction of Arrival Estimators. *IEEE Trans. Signal Process.* 2005;53(4):1359–1373. <https://doi.org/10.1109/TSP.2005.843717>
25. Чернояров О.В., Розанов А.Е., Сальникова А.В. Квазиправдоподобная оценка времени прихода случайного импульса с огибающей произвольной формы и неточно известной длительностью. *Радиотехника*. 2013;10:65–70.
26. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. The wavefront estimation and signal detection in multi-element antenna arrays at low SNR. In: *Proceedings 2018 2nd European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS)*. 2018 Dec 20–22; Bern, Switzerland. IEEE. P. 497–501. <https://doi.org/10.1109/EECS.2018.00097>
27. Трифонов А.П., Корчагин Ю.Э., Титов К.Д. Эффективность обнаружения одного класса сверхширокополосных сигналов в условиях параметрической априорной неопределенности. *Журнал технической физики*. 2018;88(8):1235–1240. <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.08.46315.2552>
28. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. Joint detection and the AoA estimation of noncoherent signals in multi-element antennas. In: *Proceedings 2019 International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems (SPECTS)*. 2019 Jul 22–24; Berlin, Germany. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.23919/SPECTS.2019.8823557>
29. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Investigation of theoretical limits for unconditional AoA estimations in multi-element antenna arrays by simulations. In: *Proceedings 2020 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. 2020 Feb 26–28; Buenos Aires, Argentina. IEEE. P. 663–668. <https://doi.org/10.1109/ICIT45562.2020.9067150>
30. Fateev A.A., Tokarev A.B., Chernoyarov O.V., Salnikova A.V. Influence of the radiation pattern errors for the correlation interferometer. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;2094(2):022054. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2094/2/022054>
31. Serbes A., Qaraqe K.A. Threshold regions in frequency estimation. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2022;58(5):4850–4856. <https://doi.org/10.1109/TAES.2022.3166063>
32. Болховская О.В., Мальцев А.А., Сергеев В.А. Система пассивного обнаружения и измерения расстояния до источника на основе оценки волнового фронта сигнала. *Радиотехника*. 2022;86(9):98–112. <https://doi.org/10.18127/j00338486-202209-11>

33. Beshara-Flynn K., Adhikari K. Effects of signal and array parameters on MSE and CRB in DOA estimation. In: *2022 IEEE 13th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. 2022 Oct 26–29; New York, NY, USA. IEEE. P. 373–379. <https://doi.org/10.1109/UEMCON54665.2022.9965625>
34. Чуманкин Ю.Е., Фидельман В.Р., Морозов О.А. Метод оценки изменения направлений главных максимумов диаграммы направленности многолучевой антенны в задаче пассивной пеленгации. *Известия вузов. Радиофизика*. 2022;65(9):689–697. https://doi.org/10.52452/00213462_2022_65_09_758
35. Щукин А.А., Павлов А.Е. Параметризация пользовательских функций в цифровой обработке сигналов для получения углового сверхразрешения. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):38–43. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>
36. Bolkhovskaya O., Sergeev V., Maltsev A. Cramér–Rao lower bounds for the task of joint estimation of signal initial phase and AoA in multi-element antenna arrays. In: *2023 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. 2023 Jun 5–9; St. Petersburg, Russian Federation. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/WECONF57201.2023.10148023>
37. Xu Y., Cao N., Jin H., et al. Robust beamforming design for integrated sensing and communication systems. *IEEE J. Sel. Areas Sens.* 2024;1:114–123. <https://doi.org/10.1109/JSAS.2024.3421391>
38. Корчагин Ю.Э., Титов К.Д., Воловач В.И., Кондратович П.А., Завалишина О.Н. Квазиправдоподобная оценка времени прихода сверхширокополосного квазирadiосигнала с неизвестными амплитудой и начальной фазой. *Радиотехника*. 2024;88(9):112–122. <https://doi.org/10.18127/j00338486-202409-10>
39. Ермолаев В.Т., Семенов В.Ю., Флакман А.Г. Пространственно-временная обработка сигналов в автомобильном радаре в условиях активных помех. *Известия вузов. Радиофизика*. 2024;67(3):292–301. https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_03_292
40. Mazor Y., Berman I.E., Routtenberg T. On the limitations of the Bayesian Cramér–Rao bound for mixed-resolution data. *IEEE Signal Process. Lett.* 2025;32:446–450. <https://doi.org/10.1109/LSP.2024.3519804>
41. Бolkhovskaya O.B., Сергеев В.А., Мальцев А.А. Обнаружение и определение положения источника сигнала в ближней зоне круговой антенной решетки. *Антенны*. 2023;5:23–37. <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-03>
42. Сергеев В.А. Оптимизация размера круговой антенной решетки в задаче определения направления на источник излучения в дальней зоне. *Антенны*. 2023;5:13–22. <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-02>
43. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Accurate iterative algorithm for detection and the signal AoA estimation in low SNR region. In: *2019 4th International Conference on Computing, Communications and Security (ICCCS)*. 2019 Oct 10–12; Rome, Italy. IEEE. P. 89–95. <https://doi.org/10.1109/CCCS.2019.8888112>

REFERENCES

1. Skolnik M.I. *Radar Handbook*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill Professional; 2008. 1328 p.
2. Shirman Ya.D., Manzhos V.N. *Teoriya i tekhnika obrabotki radiolokatsionnoi informatsii na fone pomekh (Theory and Technique of Radar Information Processing Against the Background of Interference)*. Moscow: Radio i svyaz; 1981. 416 p. (in Russ.).
3. Richards M.A. *Fundamentals of Radar Signal Processing*. New York: McGraw-Hill; 2014. 640 p.
4. Vaughan R., Andersen J.B. *Channels, Propagation and Antennas for Mobile Communications*. London: The Institution of Engineering and Technology; 2003. 784 p. <https://doi.org/10.1049/PBEW050E>
5. Sand S., Dammann A., Mensing C. *Positioning in Wireless Communications Systems*. Chichester: John Wiley & Sons; 2014. 280 p.
6. Krim H., Viberg M. Two decades of array signal processing research: the parametric approach. *IEEE Signal Processing Mag.* 1996;13(4):67–94. <https://doi.org/10.1109/79.526899>
7. Dosso S.E., Wilmut M.J. Maximum-likelihood and other processors for incoherent and coherent matched-field localization. *J. Acoust. Soc. Am.* 2012;132(4):2273–2285. <https://doi.org/10.1121/1.4730978>
8. Malekhanov A.I., Smirnov A.V. Large-Array Processing of Coherence-Degraded Signals: Analytical Study, Modeling, and Estimations of Optimization Possibilities. *Radiophys. Quantum El.* 2023;66(12):988–1011. <https://doi.org/10.1007/s11141-024-10346-3>
[Original Russian Text: Malekhanov A.I., Smirnov A.V. Large-Array Processing of Coherence-Degraded Signals: Analytical Study, Modeling, and Estimations of Optimization Possibilities. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika*. 2023;66(12):1094–1121 (in Russ.). https://doi.org/10.52452/00213462_2023_66_12_1094]
9. Stoica P., Nehorai A. MUSIC, maximum likelihood, and Cramér–Rao bound. *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.* 1989;37(5):720–741. <https://doi.org/10.1109/29.17564>
10. Li J., Compton R.T. Maximum likelihood angle estimation for signals with known waveforms. *IEEE Trans. Signal Process.* 1993;41(9):2850–2862. <https://doi.org/10.1109/78.236507>
11. Kay S.M. *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Volume 1. Estimation Theory*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall; 1993. 625 p.
12. Viberg M., Ottersten B., Nehorai A. Performance analysis of direction finding with large arrays and finite data. *IEEE Trans. Signal Process.* 1995;43(2):469–477. <https://doi.org/10.1109/78.348129>
13. Van Trees H.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I: Detection, Estimation, and Linear Modulation Theory*. New York, NY: Wiley; 2001. 716 p.

14. Van Trees H.L., Bell K.L. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV: Optimum Array Processing*. Hoboken, NJ: Wiley; 2002. 1480 p.
15. Renaux A., Foster P., Chaumette E., Larzabal P. On the high-SNR conditional maximum-likelihood estimator full statistical characterization. *IEEE Trans. Signal Process.* 2006;54(12):4840–4843. <https://doi.org/10.1109/TSP.2006.882072>
16. Renaux A., Forster P., Boyer E., Larzabal P. Unconditional maximum likelihood performance at finite number of samples and high signal-to-noise ratio. *IEEE Trans. Signal Process.* 2007;55(5):2358–2364. <https://doi.org/10.1109/TSP.2007.893205>
17. Cramer H. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press; 1946. 589 p.
18. Rao C.R. *Linear Statistical Inference and Its Applications*. New York: Wiley; 1946. 660 p.
19. Tikhonov V.I. *Optimal'nyi priem signalov (Optimal Signal Detection)*. Moscow: Radio i svyaz; 1983. 320 p. (in Russ.).
20. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. *Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh (Joint Discrimination of Signals and Estimation of Their Parameters Against the Background of Interference)*. Moscow: Radio i svyaz; 1986. 264 p. (in Russ.).
21. Barankin E.W. Locally best unbiased estimates. *Ann. Math. Statist.* 1949;20(4):477–501. <https://doi.org/10.1214/aoms/1177729943>
22. Bhattacharyya A. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhyā*. 1946;8(1):201–218. Available from URL: <https://www.jstor.org/stable/25047921>
23. Bell K.L., Ephraim Y., Van Trees H.L. Ziv-Zakai lower bounds in bearing estimation. In: *Proceedings of the 1995 International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP)*; 1995 May 9–12; Detroit, MI, USA. IEEE. P. 2852–2855. <https://doi.org/10.1109/ICASSP.1995.479888>
24. Athley F. Threshold Region Performance of Maximum Likelihood Direction of Arrival Estimators. *IEEE Trans. Signal Process.* 2005;53(4):1359–1373. <https://doi.org/10.1109/TSP.2005.843717>
25. Chernoyarov O.V., Rozanov A.E., Salnikova A.V. Quasi-likelihood appearance time estimate of the random pulse with free-form envelope shape and inaccurately known duration. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2013;10:65–70 (in Russ.).
26. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. The wavefront estimation and signal detection in multi-element antenna arrays at low SNR. In: *Proceedings 2018 2nd European Conference on Electrical Engineering and Computer Science (EECS)*; 2018 Dec 20–22; Bern, Switzerland. IEEE. P. 497–501. <https://doi.org/10.1109/EECS.2018.00097>
27. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Titov K.D. Efficiency of the Detection of a Specific Wideband Signal under a Priori Parametric Uncertainty. *Tech. Phys.* 2018;63(8):1199–1204. <https://doi.org/10.1134/S1063784218080212>
[Original Russian Text: Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Titov K.D. Efficiency of the Detection of a Specific Wideband Signal under a Priori Parametric Uncertainty. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2018;88(8):1235–1240 (in Russ.). <https://doi.org/10.21883/JTF.2018.08.46315.2552>]
28. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V. Joint detection and the AoA estimation of noncoherent signals in multi-element antennas. In: *Proceedings 2019 International Symposium on Performance Evaluation of Computer and Telecommunication Systems (SPECTS)*. 2019 Jul 22–24; Berlin, Germany. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.23919/SPECTS.2019.8823557>
29. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Investigation of theoretical limits for unconditional AoA estimations in multi-element antenna arrays by simulations. In: *Proceedings 2020 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*. 2020 Feb 26–28; Buenos Aires, Argentina. IEEE. P. 663–668. <https://doi.org/10.1109/ICIT45562.2020.9067150>
30. Fateev A.A., Tokarev A.B., Chernoyarov O.V., Salnikova A.V. Influence of the radiation pattern errors for the correlation interferometer. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2021;2094(2):022054. <http://doi.org/10.1088/1742-6596/2094/2/022054>
31. Serbes A., Qaraqe K.A. Threshold regions in frequency estimation. *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 2022;58(5):4850–4856. <https://doi.org/10.1109/TAES.2022.3166063>
32. Bolkhovskaya O.V., Maltsev A.A., Sergeev V.A. A passive system for source detection and distance measurement based on signal wavefront estimation. *Radiotekhnika = Radioengineering*. 2022;86(9):98–112 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j00338486-202209-11>
33. Beshara-Flynn K., Adhikari K. Effects of signal and array parameters on MSE and CRB in DOA estimation. In: *2022 IEEE 13th Annual Ubiquitous Computing, Electronics & Mobile Communication Conference (UEMCON)*. 2022 Oct 26–29; New York, NY, USA. IEEE. P. 373–379. <https://doi.org/10.1109/UEMCON54665.2022.9965625>
34. Chumankin Yu.E., Fidelman V.R., Morozov O.A. A Method for Estimating the Changes in the Directions of the Main Maxima of the Directional Pattern of a Multibeam Antenna in the Problem of Passive Direction Finding. *Radiophys. Quantum El.* 2022;65(9):689–697. <https://doi.org/10.1007/s11141-023-10249-9>
[Original Russian Text: Chumankin Yu.E., Fidelman V.R., Morozov O.A. A Method for Estimating the Changes in the Directions of the Main Maxima of the Directional Pattern of a Multibeam Antenna in the Problem of Passive Direction Finding. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika*. 2022;65(9):758–767 (in Russ.). https://doi.org/10.52452/00213462_2022_65_09_758]
35. Shchukin A.A., Pavlov A.E. Parameterization of user functions in digital signal processing for obtaining angular superresolution. *Russ. Technol. J.* 2022;10(4):38–43. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-4-38-43>
36. Bolkhovskaya O., Sergeev V., Maltsev A. Cramér–Rao lower bounds for the task of joint estimation of signal initial phase and AoA in multi-element antenna arrays. In: *2023 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. 2023 Jun 5–9; St. Petersburg, Russian Federation. IEEE. P. 1–6. <https://doi.org/10.1109/WECONF57201.2023.10148023>

37. Xu Y., Cao N., Jin H., et al. Robust beamforming design for integrated sensing and communication systems. *IEEE J. Sel. Areas Sens.* 2024;1:114–123. <https://doi.org/10.1109/JSAS.2024.3421391>
38. Korchagin Yu.E., Titov K.D., Volovach V.I., Kondratovich P.A., Zavalishina O.N. Quasi-likelihood estimation of the arrival time of an ultra-wideband quasi-radio signal with unknown amplitude and initial phase. *Radiotekhnika = Radioengineering.* 2024;88(9):112–122 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j00338486-202409-10>
39. Ermolaev V.T., Semenov V.Yu., Flaksman A.G. Spatiotemporal signal processing in automotive radar subject to active interference. *Radiophys. Quantum El.* 2024;67(3):261–269. <https://doi.org/10.1007/s11141-025-10371-w>
[Original Russian Text: Ermolaev V.T., Semenov V.Yu., Flaksman A.G. Spatiotemporal signal processing in automotive radar subject to active interference. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Radiofizika.* 2024;67(3):292–301 (in Russ.). https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_03_292]
40. Mazor Y., Berman I.E., Routtenberg T. On the limitations of the Bayesian Cramér–Rao bound for mixed-resolution data. *IEEE Signal Process. Lett.* 2025;32:446–450. <https://doi.org/10.1109/LSP.2024.3519804>
41. Bolkhovskaya O.V., Sergeev V.A., Maltsev A.A. Detection and position determination of the signal source in the near-field zone of the circular antenna array. *Antenny = Antennas.* 2023;5:23–37 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-03>
42. Sergeev V.A. Optimization of the size of the circular antenna array in the problem of determining the direction to the radiation source in the far-field zone. *Antenny = Antennas.* 2023;5:13–22 (in Russ.). <https://doi.org/10.18127/j03209601-202305-02>
43. Bolkhovskaya O., Maltsev A., Sergeev V., Keusgen W., Peter M. Accurate iterative algorithm for detection and the signal AoA estimation in low SNR region. In: *2019 4th International Conference on Computing, Communications and Security (ICCCS)*. 2019 Oct 10–12; Rome, Italy. IEEE. P. 89–95. <https://doi.org/10.1109/CCCS.2019.8888112>

Об авторе

Болховская Олеся Викторовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра статистической радиофизики и мобильных систем связи, Радиофизический факультет, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23). E-mail: obol@rf.unn.ru. Scopus Author ID 56373874700, ResearcherID AAQ-4264-2020, SPIN-код РИНЦ 4240-6246, <https://orcid.org/0000-0002-6679-9295>

About the Author

Olesya V. Bolkhovskaya, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Statistical Radiophysics and Mobile Communication Systems, Faculty of Radiophysics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23, Gagarina pr., Nizhny Novgorod, 603950 Russia). E-mail: obol@rf.unn.ru. Scopus Author ID 56373874700, ResearcherID AAQ-4264-2020, RSCI SPIN-code 4240-6246, <https://orcid.org/0000-0002-6679-9295>