

УДК 004.9:539.17

DOI: 10.32362/2500-316X-2018-6-5-45-54

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ВИХРЕВЫХ СТРУКТУР В СВЕРХЗВУКОВОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

**И.Г. Лебо[@],
А.И. Симаков**

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

@Автор для переписки, e-mail: lebo@mirea.ru

Методами математического моделирования изучена эволюция вихревых структур, перемещающихся в газе за фронтом ударной волны. Сама ударная волна задается с помощью соотношений Гюгонио, которые позволяют определить параметры газа за фронтом ударной волны по заданному числу Маха и значениям газодинамических параметров перед скачком давления. Предложен параллельный алгоритм и модернизирована программа для решения двумерных уравнений газовой динамики. Выполнены численные расчеты, моделирующие взаимодействие ударной волны, как падающей, так и отраженной, с областью, занятой вихрями различной конфигурации (уединенный вихрь, два разнонаправленных вихря). Представлены результаты тестовых решений на параллельном суперкомпьютере с использованием различного числа процессоров. Показано, что при использовании 40 процессоров удается сократить время расчета примерно в 30 раз. Газодинамические параметры на момент времени $t=0$ заданы по закону Бернулли. Показано удовлетворительное совпадение результатов расчетов, моделирующих развитие сложных вихревых структур и выполненных по разным методикам. Рассмотрена возможность проведения натурных экспериментов на ударных трубах или с помощью лазерной ударной трубы. Подобные исследования позволили бы сравнить экспериментальные данные с результатами численных расчетов и на их основе развить более совершенные модели турбулентных движений.

Ключевые слова: численное моделирование, сверхзвуковые течения, вихри, TVD-разностные схемы.

MODELING THE EVOLUTION OF WHIRL STRUCTURES IN A SUPERSONIC GAS STREAM

**I.G. Lebo[@],
A.I. Simakov**

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

@Corresponding author e-mail: lebo@mirea.ru

With the help of mathematical modeling methods we studied the evolution of whirl structures moving in a gas behind a shock wave front. This shock wave is defined by the Hugoniot relations. The Hugoniot relations allow finding the parameters of the gas behind the shock wave front, if the Mach number and gas parameters before the pressure jump are known.

We developed a parallel algorithm and a numerical code for solving 2D gas dynamics equations. We made numerical simulations that modeled the shock wave interaction with whirl structures of different configurations (single whirl, two whirls with different directions of their vectors). We demonstrated the results of test simulations in a supercomputer with a different number of processors. It was shown that using 40 processors allows decreasing the duration of a test simulation approximately by the factor of 30.

We described the results of the calculation of interaction of one/two whirls with the incident wave and the reflected waves. The gas dynamics parameters at the moment $t = 0$ were set with the help of Bernoulli law. Besides, we made a comparison with a similar program based on another algorithm (particle-in-cell method).

It was shown that the interaction of two whirls with opposite directions does not lead to their compensation, but the interaction area (turbulent zone) has a complicated shape. The possibility of natural experiments with the help of a shock tube and a laser shock tube is discussed in the article. Such research would allow comparing the experimental data with the results of numerical simulations and developing more complicate models of the turbulent motion.

Keywords: numerical simulation, shock wave, whirls, TVD difference schemes.

Введение

Изучение особенностей развития вихрей и турбулентных сверхзвуковых течений является актуальной задачей современной газовой динамики и физики высоких концентраций энергии. Такие задачи возникают при изучении вхождения космических объектов в плотные слои атмосферы Земли, развитии газодинамических неустойчивостей вблизи контактной поверхности двух сред, движущихся ускоренно, при формировании и развитии ураганов у поверхности Земли, а также в исследованиях по инерциальному термоядерному синтезу. Для решения указанных задач применяют методы математического моделирования [1]. Известны результаты расчетов, выполненные с помощью программы ENS [2, 3]. Эта программа позволяет решать двумерные уравнения Навье-Стокса с помощью метода «крупных частиц», описанного в монографии [4]. В основе алгоритма решения уравнений газовой динамики в программе ENS использованы разностные схемы первого порядка аппроксимации, а расчеты выполнены на одном процессоре.

В настоящей статье мы представляем результаты расчетов, выполненные по программе NUT [5], в которой для решения уравнений газовой динамики используют TVD-разностные схемы повышенного порядка аппроксимации [6, 7]. Для более эффективного применения вычислительных ресурсов программа распараллелена по методике, предложенной ранее [8]. Результаты применения данной методики представлены в таблице.

Зависимость времени расчета и количества выполненных шагов от количества процессоров

Количество процессоров	1	8	40
Время выполнения 1000 шагов, с	2481	337	81
Количество выполненных шагов за 1 ч	1463	10658	49435

Очевидно (см. таблицу), что увеличение количества процессоров позволяет кардинально сократить время расчетов: при применении 40 процессоров удалось сократить время расчета примерно в 30-33 раза.

Возможно два основных вида распараллеливания:

- алгоритмический (по управлению);
- геометрический (по данным).

Нами выбран геометрический способ, как наиболее простой и подходящий в данном случае (рис. 1): расчетная область в форме прямоугольника разбивается прямыми, параллельными координатным осям, на одинаковые по размеру подобласти (рис. 1а). Каждая подобласть обрабатывается своим процессором, и, таким образом, на каждом вычислительном узле расчет идет по одинаковой схеме. В ходе расчетов использовали вариант с разбиением всей области по оси OZ (рис. 1б).

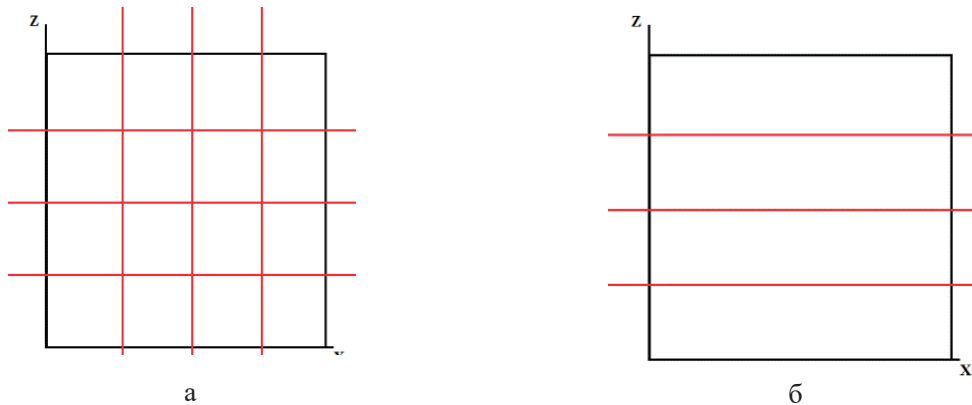


Рис. 1. Распараллеливание в NUT: а) общий случай; б) использовавшийся в расчетах.

С целью сохранения однородности вычислительной схемы для каждой новой подобласти вводили по два слоя фиктивных ячеек на каждой из четырех границ. Значения в этих ячейках определяли двумя способами (в зависимости от положения в сетке):

- 1) исходя из граничных условий (если граница новой подобласти совпадает с границей всей расчетной области);
- 2) на границу следующей подобласти данные передаются с процессора, который обрабатывает предыдущую подобласть (для внутренних подобластей).

Постановка задач

Программа NUT позволяет численно решать уравнения газовой динамики в двумерной (и трехмерной) геометрии в декартовых координатах [9, 10]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} + \frac{\partial H(U)}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

где

$$U = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \cdot u \\ \rho \cdot w \\ e \end{Bmatrix}, F(U) = \begin{Bmatrix} \rho \cdot u \\ \rho \cdot u^2 + p \\ \rho \cdot u \cdot w \\ u \cdot e + p \cdot u \end{Bmatrix}, H(U) = \begin{Bmatrix} \rho \cdot w \\ \rho \cdot u \cdot w \\ \rho \cdot w^2 + p \\ w \cdot e + p \cdot w \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

здесь ρ – плотность;

p – давление;

$V_x = u, V_z = w$ – компоненты вектора скорости V ;

$e = \rho \left(\varepsilon + \frac{V^2}{2} \right)$ – полная энергия.

Система уравнений (1-2) дополнена уравнением состояния

$$p = (\gamma - 1) \rho \varepsilon,$$

где ε – удельная внутренняя энергия;

γ – показатель адиабаты;

и уравнением непрерывности для каждой компоненты газа (всего n компонент)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_i V = 0, \text{ где } i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Если газ содержит две компоненты, то удобно решать уравнение непрерывности для смеси (уравнение (1)) и уравнение для одной из компонент (3). Далее определяют концентрацию первого компонента C , а концентрация второго компонента равна $1-C$ (в трехмерной геометрии система уравнений (1-2) остается прежней, но добавляется переменная y).

Ударную волну задавали с помощью соотношений Гюгонио [11]:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_0 \frac{2\gamma M_x^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}; \quad ZP = \frac{P_1}{P_0}; \\ C_s^2 &= \gamma \frac{P_0}{\rho_0}; \quad D = M_x C_s; \\ \rho_1 &= \rho_0 \frac{\gamma + 1 + (\gamma - 1) / ZP}{\gamma - 1 + (\gamma + 1) / ZP}; \\ u_1^2 &= \left(\gamma \frac{P_1}{\rho_1} \right) \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1) / ZP}{2\gamma} \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $P_{1(0)}, \rho_{1(0)}$ – давление и плотность за фронтом (перед фронтом) ударной волны;

γ – показатель адиабаты;

C_s – скорость звука;

D – скорость движения фронта ударной волны в лабораторной системе отсчета.

Достаточно задать число Маха (M_x) и термодинамические параметры газа перед фронтом ударной волны, чтобы определить соответствующие параметры за фронтом. Скорость движения газа за фронтом ударной волны в лабораторной системе отсчета определяется по формуле

$$w_1 = D - u_1.$$

Распространение ударной волны моделировали в инертном газе – аргоне, показатель адиабаты $\gamma = 5/3$, начальное давление $P_0 = 0.5$ атм, плотность¹ $\rho_0 = 0.802$ мг/см³, число Маха $M_x = 3.5$. Постановка задачи схематично показана на рис. 2. Ударная волна задается с помощью соотношений Гюгонио в области $0 < z < b_0$ и движется снизу-вверх в области $0 < x < L_x, 0 < z < L_z$; L_x, L_z – размеры расчетной области.

¹Программа NUT использует для работы величины в системе СГС (сантиметр – грамм – секунда).

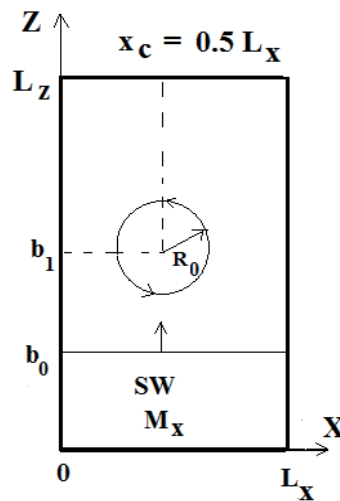


Рис. 2. Расчетная область и начальное расположение ударной волны (SW) и вихря.

Следует отметить, что в программе, наряду с термодинамическими переменными и скоростями (в частности, абсолютное значение скорости $V_{abs} = \sqrt{u^2 + w^2}$, $V_x = u$, $V_z = w$), вычисляли также ротор скорости $rotV$. В каждой расчетной ячейке, согласно теореме Стокса, определяли величину $curl(x,z)dxdz$ ($\oint (\vec{V} d\vec{l}) = \iint (rot \vec{V} \vec{n}) ds$) как функцию координат x и z (см. [2]).

Задача 1 и 2. Взаимодействие ударной волны с уединенным вихрем

В задачах 1, 2 в точке (x_c, z_c) находится центр вихря, который задается в начальный момент времени следующим образом:

$$V_x = \begin{cases} -(z - z_c)\omega, & r \leq R_0 \\ -(z - z_c)\omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_z = \begin{cases} (x - x_c)\omega, & r \leq R_0 \\ (x - x_c)\omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad (5)$$

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (z - z_c)^2}, \quad z_c = b_1, \quad x_c = 0.5 \cdot L_x.$$

Чтобы сгладить края вихря при $r > R_0$, задавали «экспоненциальное» убывание скорости. В первой серии расчетов изучали особенности взаимодействия ударной волны с уединенным вихрем и сравнивали их с результатами расчетов, полученных по программе ENS и опубликованных в [2].

Параметры задачи следующие: $R_0 = 3.5948748$ см, $b_0 = 2$ см, $b_1 = 9.11136$ см, $\omega = 2.78 \cdot 10^3$ с⁻¹, $L_x = 14.58$ см, $L_z = 72.11136$ см. Расчеты сделаны на разностной сетке $(640 \times 3200)^2$. Результаты расчетов показаны ниже (разница в 10^3 раз объясняется тем, что в программе NUT масштаб времени взят в миллисекундах, а в программе ENS – в секундах).

²[http:// www.jscc.ru](http://www.jscc.ru)

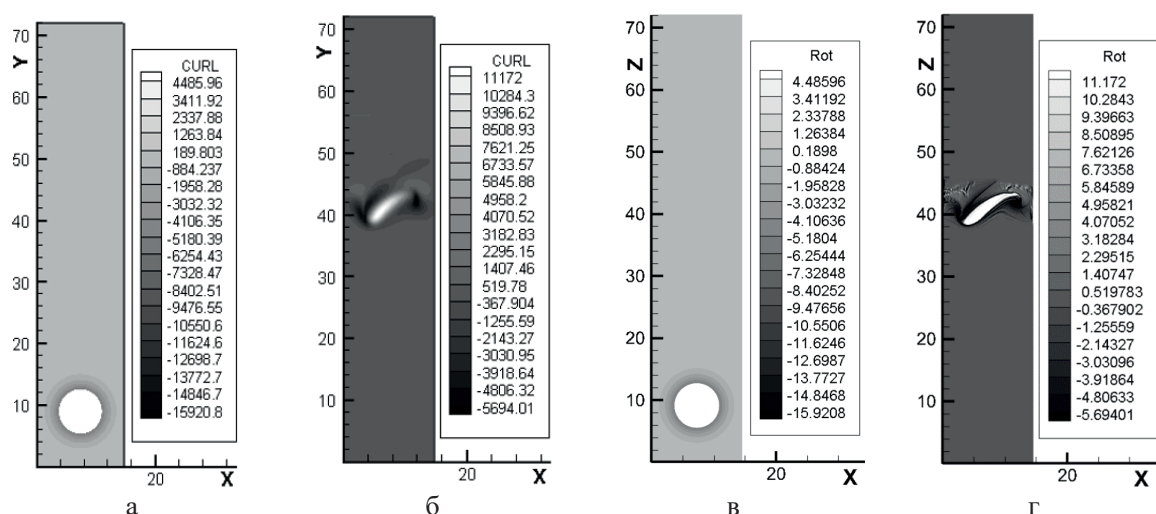


Рис. 3. Поля роторов скорости на моменты времени $t = 0$ (а, в) и $t = 0.48$ мс (б, г).

Из рис. 3 видно удовлетворительное совпадение результатов расчетов, выполненных с помощью программ ENS (рис. 3а и рис. 3б) и NUT (рис. 3в и рис. 3г) по различным методикам³.

На рис. 4а показано поведение вихря после того, как отраженная от верхнего торца ударная волна вторично прошла через возмущенную область; на рис. 4б – профиль плотности вдоль оси OZ на этот же момент времени.

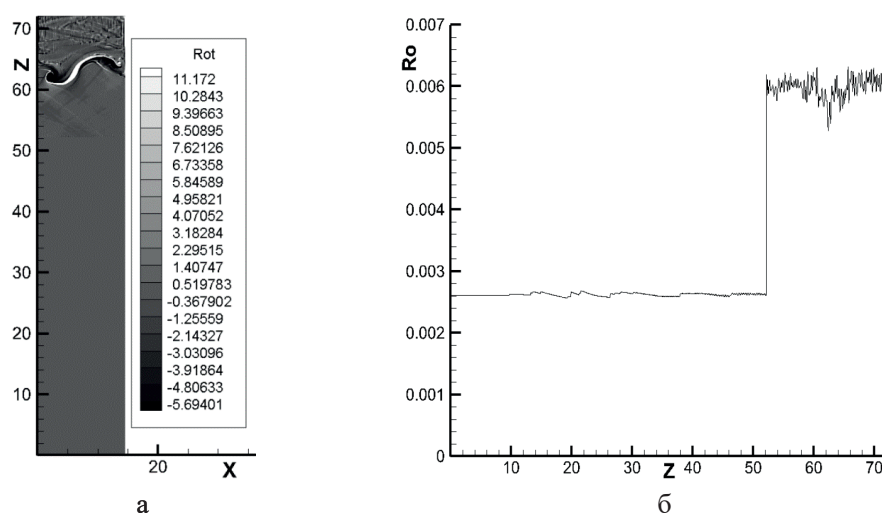


Рис. 4. Поле ротора скорости на момент времени $t = 0.96$ мс (а) и распределение плотности газа вдоль оси OZ при фиксированном значении $x = 7.29$ см (б).

Как можно заметить, после повторного прохождения ударной волны вихревая структура не разрушилась, но приобрела более сложную форму. «Мелкомасштабная рябь» – это энтропийный след, который возникает за фронтом ударной волны в численных расчетах.

В предыдущих расчетах давление и плотность газа в вихре задавались постоянными величинами. В природе, как правило, давление в вихре отличается от давления в окружающем газе. Показано, что в несжимаемой среде в стационарном потоке газодинамические параметры должны удовлетворять закону Бернулли:

³Ранее в [12] было показано хорошее согласие результатов, при моделировании распространения ударных волн в однородных газах без вихрей, выполненные на одном процессоре по программам ENS и NUT.

$$\frac{P}{\rho} + \frac{v^2}{2} = const,$$

где v – скорость потока.

В следующей серии расчетов в области вихря начальное давление менялось по закону

$$P(x, z) = P_0 - 0.5 \cdot \rho_0 \cdot V_{abs}^2(x, z),$$

где P_0, ρ_0 – давление и плотность невозмущенного газа перед фронтом ударной волны. Значение b_j в этой серии расчетов составило 11.11136 см, а угловая скорость в вихре увеличена до $\omega = 5.56 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$.

На рис. 5 показано распределение абсолютного значения скорости и ротора скорости в разные моменты времени: $t = 0$ (рис. 5а); $t = 0.48$ мс (рис. 5б), когда ударная волна прошла через вихрь; $t = 0.96$ мс (рис. 5в), когда ударная волна отразилась от верхней стенки и повторно прошла через вихрь.

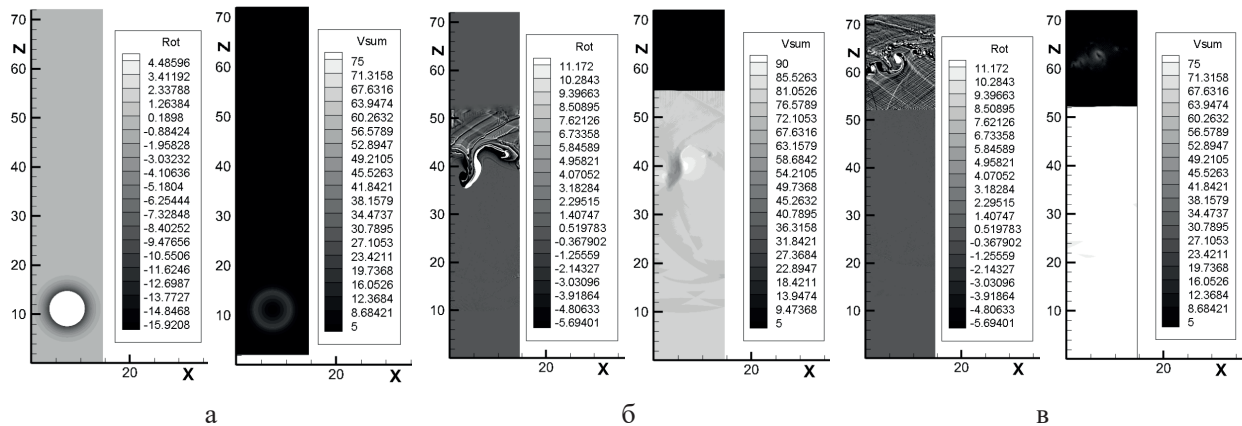


Рис. 5. Поля абсолютного значения скорости и ротора скорости на моменты времени $t = 0$ (а); $t = 0.48$ мс (б); $t = 0.96$ мс (в).

В третьей серии расчетов мы изучали взаимодействие двух разнонаправленных вихрей. Нас интересовал вопрос: будет ли наблюдаться взаимная компенсация этих вихрей? Вихри задавались следующим образом:

Первый вихрь:

$$V_x = \begin{cases} -(z - z_{c1})\omega, & r \leq R_0 \\ -(z - z_{c1})\omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_z = \begin{cases} (x - x_{c1})\omega, & r \leq R_0 \\ (x - x_{c1})\omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad (6)$$

Второй вихрь:

$$V_x = \begin{cases} (z - z_{c2})\omega, & r \leq R_0 \\ (z - z_{c2})\omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad V_z = \begin{cases} -(x - x_{c2})\omega, & r \leq R_0 \\ -(x - x_{c2})\omega / \exp\left(\frac{r - R_0}{R_0}\right)^4, & r > R_0 \end{cases} \quad (7)$$

$$r = \sqrt{(x - x_c)^2 + (z - z_c)^2},$$

где $z_{c1} = b_1, z_{c2} = b_2, x_c = 0.5 \cdot L_x$; значения $b_0, b_1, b_2, \omega, R_0$ – параметры задачи.

В представленных результатах они составляли 2 см, 9.11136 см, 25.11136 см, $5.56 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ и 3.5948748 см, соответственно. Кроме того, учитывался закон Бернулли.

На рис. 6 приведены результаты данной серии расчетов. Как следует из рис. 6, вихри не компенсируют друг друга даже после отражения волны от верхней стенки, но при этом происходит сильная деформация вихревых структур.

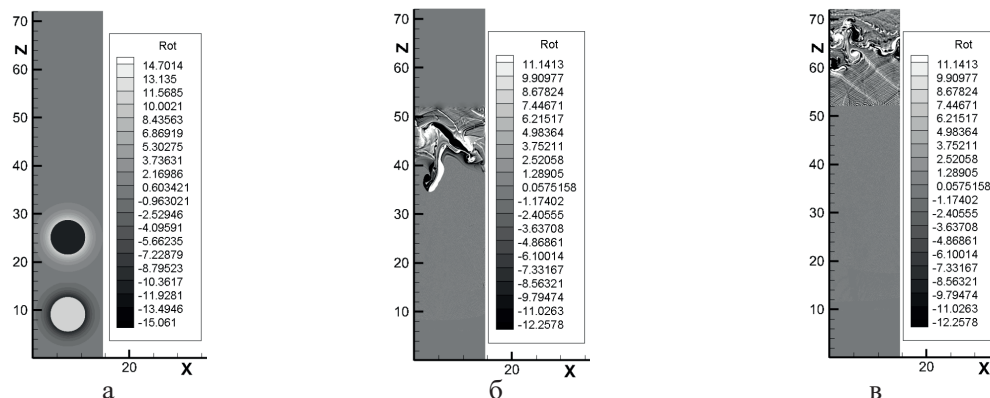


Рис. 6. Поля роторов скорости на моменты времени $t = 0$ (а); $t = 0.48$ мс (б); $t = 0.96$ мс (в).

Заключение

Выполнено три серии расчетов для решения двумерных уравнений газовой динамики. В первой серии проводили сравнение с известными данными, полученными по программе ENS. Показано удовлетворительное совпадение результатов, полученных по различным методикам. Во второй серии – начальное давление в вихре задано с учетом закона Бернулли, что обеспечило устойчивое положение вихря до прихода ударной волны. Показано, что учет закона Бернулли в расчетах приводит к изменению формы вихря по сравнению с первой серией расчетов после повторного прохождения ударной волны. В третьей серии расчетов изучено взаимодействие двух разнонаправленных вихрей за фронтом падающей и отраженной ударных волн. Установлено, что взаимодействие вихрей между собой вследствие падения ударной волны не приводит к их компенсации, взаимодействуют два разнонаправленных вихря, причем область взаимодействия вихрей (турбулентная зона) приобретает сложную форму.

В связи с тем, что математическая постановка задачи моделирования развития вихрей в настоящей статье существенно отличается от ранее опубликованной работы [13], в которой также моделируется падение ударной волны на вихрь, но на основе схемы «КАБАРЕ», прямое сравнение полученных нами результатов с расчетами по методике двумерных уравнений газовой динамики не приводится.

Важно обратить внимание на то, что в принципе вихри можно сформировать в пенообразной среде, помещенной в ударную трубу, при пропускании через эту среду электрического импульса тока (см. в [2])⁴, а также непосредственно в лазерной ударной трубе. В таком устройстве формируются ударные волны с большими числами Маха ($>10!$) ([14]), поэтому можно ожидать сублимации пены и образования вихрей за фронтом волны без подключения стороннего источника тока.

Работа выполнена с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук (МСЦ РАН).

⁴В этом случае образуется плазма.

Литература:

1. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Наука-Физматлит, 1997. 316 с.
2. Лебо И.Г., Акжолов М.Ж. Моделирование взаимодействия ударной волны с вихревыми структурами в газе // Вестник МГТУ МИРЭА. 2015. № 2(7). С. 240–250.
3. Мадера А.Г., Акжолов М.Ж., Лебо И.Г. Моделирование развития процессов «конвекция плюс теплопроводность» в воздухе вблизи процессора // Труды НИИСИ РАН. 2013. Т. 3. № 1. С. 90–93.
4. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука, 1982. 391 с.
5. Лебо И.Г., Тишкин В.Ф. Исследование гидродинамической неустойчивости в задачах лазерного термоядерного синтеза. М.: Физматлит, 2006. 304 с.
6. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes // SIAM J. Numeric Anal. 1984. V. 21. № 1. P. 1–23.
7. Вязников К.В., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Построение монотонных разностных схем повышенного порядка аппроксимации для систем уравнений гиперболического типа // Математическое моделирование. 1989. Т. 1. № 5. С. 95–120.
8. Ладонкина М.Е. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем: дис. ... канд. физ.-мат. наук: Москва, 2005. 157 с.
9. Основы газовой динамики / Ред. Г. Эммонс: Пер. с англ. В.В. Белого [и др.] / Под ред. Г.И. Баренблатта и Г.Г. Черного. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 704 с.
10. Дмитриев О.А., Кривец В.В., Лебо И.Г., Симаков А.И., Титов С.Н., Чеботарева Е.И. Моделирование развития гидродинамической неустойчивости при прохождении волны сжатия через контактную поверхность двух газов // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 8. С. 22–32.
11. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 687 с.
12. Акжолов М.Ж., Дмитриев О.А., Лебо И.Г., Мадера А.Г. Сравнение расчетов распространения ударных волн в газах, выполненные по программам ENS и NUT_2D // Труды НИИСИ РАН. 2014. Т. 4. № 1. С. 58–61.
13. Головизнин В.М., Карабасов С.А., Кондаков В.Г. Обобщение схемы КАБАРЕ на двумерные ортогональные сетки // Математическое моделирование. 2013. Т. 25. № 7. С. 103–136.
14. Зворыкин В.Д., Лебо И.Г. Применение мощного KrF-лазера для исследования сверхзвуковых течений газа и развития гидродинамических неустойчивостей в слоистых средах // Квантовая электроника. 2000. Т. 30. № 6. С. 540–544.

References:

1. Samarskiy A.A., Mikhailov A.P. Mathematic Modeling. Moscow: Nauka-Fizmatlit Publ., 1997. 316 p. (in Russ.)
2. Lebo I.G., Akzholov M.Zh. Model operation of interaction of a shockwave with vortex structures in gas. *Vestnik MGTU MIREA*. 2015; (2-7): 240-250. (in Russ.)

3. Madera A.G., Akzholov M.Zh., Lebo I.G. Modeling of development of processes "convection plus heat conductivity" in air near the processor. *Trudy NIISI RAN* (Proceed. of the Research Institute for System Studies RAS). 2013; 3(1): 90-93. (in Russ.)
4. Belotserkovskiy O.M., Davydov Yu.M. The large particles method in the gas dynamics. Moscow: Nauka Publ., 1982. 391 p. (in Russ.)
5. Lebo I.G., Tishkin V.F. Research of hydrodynamic instability in problems of laser thermonuclear synthesis. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006. 304 p. (in Russ.)
6. Harten A. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM J. Numeric Anal.* 1984; 21(1): 1-23.
7. Vyaznikov K.V., Tishkin V.F., Favorskiy A.P. Construction of monotone difference schemes of a higher order of approximation for systems of hyperbolic equations. *Matematicheskoe modelirovanie* (Mathematic Modeling). 1989; 1(5): 95-98. (in Russ.)
8. Ladonkina M.E. Numerical modeling of turbulent mixing with use of high-performance systems: diss. ... Ph.D. (Physics and Mathematics). Moscow, 2005. 157 p. (in Russ.)
9. Fundamentals of Gas Dynamics. Editor Howard W. Emmons. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1958.
10. Dmitriev O.A., Krivets V.V., Lebo I.G., Simakov A.I., Titov S.N., Chebotareva E.I. Modeling of development of hydrodynamic instability when passing a wave of compression through the contact surface of two gases. *Matematicheskoe modelirovanie* (Mathematic Modeling). 2013; 25(8): 22-32. (in Russ.)
11. Zel'dovich Ya.B., Raizer Yu.P. Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena. Moscow: Nauka Publ., 1966. 687 p. (in Russ.)
12. Akzholov M.Zh., Dmitriev O.A., Lebo I.G., Madera A.G. Comparison of calculations of distribution of shock waves in gases, executed according to the ENS programs and NUT_2D. *Trudy NIISI RAN* (Proceed. of the Research Institute for System Studies RAS). 2014; 4(1): 58-61. (in Russ.)
13. Goloviznin V.M., Karabasov S.A., Kondakov V.G. Synthesis of the scheme of CABARET on two-dimensional orthogonal grids. *Matematicheskoe modelirovanie* (Mathematical Modeling). 2013; 25(7): 103-136. (in Russ.)
14. Zworykin V.D., Lebo I.G. The use of the potent KrF-laser for a research of supersonic currents of gas and development of hydrodynamic instabilities in stratified mediums. *Kvantovaya elektronika* (Quantum Electronics). 2000; 30(6): 540-544. (in Russ.)

Об авторах:

Лебо Иван Германович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Симаков Артем Игоревич, соискатель.

About the authors:

Ivan G. Lebo, D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor of Higher Mathematics Chair, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow, 119454, Russia).

Artem I. Simakov, competitor of a scientific degree.

Для цитирования: Лебо И.Г., Симаков А.И. Моделирование развития вихревых структур в сверхзвуковом газовом потоке // Российский технологический журнал. 2018. Т. 6. № 5. С. 45–54. DOI: 10.32362/2500-316X-2018-6-5-45-54

For citation: Lebo I.G., Simakov A.I. The modeling of the evolution of the whirl structures in the supersonic gas stream. *Rossiyskiy tekhnologicheskiy zhurnal* (Russian Technological Journal). 2018; 6(5): 45-54. (in Russ.) DOI: 10.32362/2500-316X-2018-6-5-45-54