Математическое моделирование Mathematical modeling

УДК 537.811 https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-5-87-94 EDN SPEPVZ



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Аналитическая модель нормальной составляющей магнитной индукции постоянного магнита

М.М. Закатов [®]

Академия гражданской защиты МЧС России имени Д.И. Михайлика, Химки, 141435 Россия [®] Автор для переписки, e-mail: zakatov46@mail.ru

• Поступила: 10.02.2025 • Доработана: 09.04.2025 • Принята к опубликованию: 21.07.2025

Резюме

Цели. В измерительной системе с индукционной передачей информации с перемещающейся конструкции на неподвижный приемник информационный сигнал, несущий информацию о параметрах перемещающейся конструкции, формируется магнитной системой, содержащей постоянный магнит, установленный на неподвижной части измерительной системы. Магнитное поле постоянного магнита (МППМ) определяет магнитный поток, и, следовательно, индукционный ток в другом элементе магнитной системы – проводящем витке, расположенном на перемещающейся конструкции. Для теоретического обоснования параметров измерительной системы, в т.ч. для оптимизации ее составных частей, необходима простая, удобная для применения аналитическая модель информационного сигнала (АМИС), что определяет требования к математическому описанию МППМ. Известные решения задач по расчету МППМ содержат обратные тригонометрические функции или представлены результатами численных расчетов, что затрудняет их использование для разработки АМИС измерительной системы. Целью данной статьи является получение точного решения задачи расчета МППМ и разработка на основании этого точного решения аналитической модели нормальной составляющей вектора магнитной индукции (НСВМИ) постоянного магнита, используемой для разработки АМИС.

Методы. Использовались методы математического анализа и метод эквивалентного соленоида.

Результаты. Получено точное решение задачи расчета НСВМИ МППМ, имеющего форму параллелепипеда, на основании которого получено выражение, аппроксимирующее формулу точного решения, – аналитическая модель НСВМИ.

Выводы. Полученная аналитическая модель HCBMИ может быть использована для теоретической разработки АМИС измерительной системы с индукционной передачей информации о параметрах перемещающейся конструкции на неподвижный приемник сигнала.

Ключевые слова: постоянный магнит, магнитная индукция, эквивалентный соленоид, нормальная составляющая, аналитическая модель

Для цитирования: Закатов М.М. Аналитическая модель нормальной составляющей магнитной индукции постоянного магнита. *Russian Technological Journal*. 2025;13(5):87–94. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-5-87-94, https://www.elibrary.ru/SPEPVZ

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Analytical model for the normal component of magnetic induction of a permanent magnets

Mikhail M. Zakatov ®

Dmitriy Mikhailik Academy of Civil Defence of the Ministry of Emergency Situations of Russia, Khimki, 141435 Russia

• Submitted: 10.02.2025 • Revised: 09.04.2025 • Accepted: 21.07.2025

Abstract

Objectives. In a measuring system based on the inductive transmission of information from a moving structure to a stationary signal receiver, the signal carrying useful information about the parameters of the moving structure is formed by a magnetic system containing a permanent magnet mounted on the stationary part of the measuring system. The magnetic field of the permanent magnet (MFPM) determines the magnetic flux, and, consequently, the induction current in a conducting coil located on the moving structure. In order to theoretically justify the parameters of the measuring system including the optimization of its components, a simple and easy-to-use analytical model of the useful signal for determining the requirements for the mathematical description of the MFPM is required. The use of known solutions for developing an analytical model of the useful signal of the measuring system is complicated by the need to use inverse trigonometric functions or the results of numerical calculations. The present work sets out to obtain an exact solution to the problem of calculating the MFPM and on this basis to develop a simple, convenient analytical model of the normal component of the magnetic induction vector (NCMIV) of a permanent magnet used to develop an analytical model of the useful signal.

Methods. The equivalent solenoid method was used along with mathematical analysis approaches.

Results. An exact solution for calculating the normal component of the magnetic induction vector of the parallelepiped-shaped permanent magnet was obtained. Based on this, a straightforward and easy-to-use analytical model of the NCMIV was developed, which closely approximates the formula derived for the exact solution.

Conclusions. The developed analytical model of the NCMIV can be used for theoretical development of an analytical model of the useful signal of a measuring system with inductive transmission of information about the parameters of a moving structure to a stationary signal receiver.

Keywords: permanent magnet, magnetic induction, equivalent solenoid, normal component, analytical model

For citation: Zakatov M.M. Analytical model for the normal component of magnetic induction of a permanent magnet. *Russian Technological Journal*. 2025;13(5):87–94. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-5-87-94, https://www.elibrary.ru/SPEPVZ

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах передачи информации о параметрах конструкции, меняющей свое положение относительно неподвижного приемника сигнала, в основном используется радиоканал (например, для передачи значений параметров газа в пневматической шине транспортного средства). При этом на конструкции размещаются измерительные преобразователи параметров, определяющих ее состояние,

в электрические сигналы, поступающие в радиопередатчик. На неподвижной части, например, на корпусе транспортного средства, по отношению к которому меняет свое положение колесо с пневматической шиной, размещается приемник радиосигнала.

Использование радиоканала для передачи информации обычно связано с трудностями, обусловленными ограничениями на использование электромагнитного излучения.

[®] Corresponding author, e-mail: zakatov46@mail.ru

В измерительной системе с индукционной передачей информации о состоянии перемещающейся конструкции [1, 2] информационный сигнал, несущий информацию о состоянии конструкции, формируется магнитной системой, которая формализована следующим образом (рис. 1). На верхней грани постоянного магнита, имеющего форму параллелепипеда высотой H и основанием с размерами a и b, размещается прямоугольный проводящий виток 1. В плоскости, параллельной верхней грани постоянного магнита, движется со скоростью V относительно постоянного магнита конструкция с расположенным на ней витком 2, имеющим прямоугольную форму, так, что проекция (точка А) центра витка 2 (точка O_2) на ось Ox перемещается вдоль оси Ox. Расстояние от плоскости до верхней грани постоянного магнита равно *d*. Электрическое сопротивление витка 2 определяется параметром конструкции.

При перемещении витка 2 в магнитном поле постоянного магнита (МППМ) в витке 2 возникает индукционный электрический ток, сила которого зависит от скорости витка 2, электрического сопротивления витка 2, а также от нормальной составляющей вектора магнитной индукции (НСВМИ) МППМ, перпендикулярной плоскости витка 2. Индукционный электрический ток перемещающегося витка 2 создает переменное магнитное поле в месторасположении витка 1. Электродвижущая сила витка 1, обусловленная магнитным потоком переменного магнитного поля индукционного тока перемещающегося витка 2, является информационным сигналом, содержащим

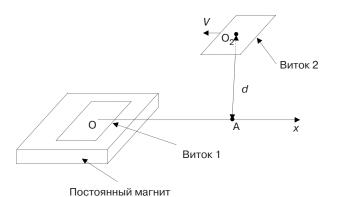


Рис. 1. Схема магнитной системы

информацию о параметре конструкции. Для определения характеристик магнитных полей различных магнитных систем развиты аналитические [3-11] и численные [12–24] методы расчетов характеристик. В данной статье для точного решения задачи распределения НСВМИ МППМ в плоскости, параллельной верхней грани постоянного магнита, применен метод эквивалентного соленоида. Полученные результаты использовались для разработки аналитической модели НСВМИ, которая может быть использована для разработки аналитических моделей магнитных потоков, создающих индукционные электрические токи в проводящих витках 1 и 2. Результаты расчетов распределения МППМ, изложенные в [11], дополнены расчетами распределения МППМ в геометрической области вблизи постоянного магнита.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Магнитное поле создается однородно намагниченным по оси Oz постоянным магнитом (рис. 2). Начало системы координат Oxyz размещается в центре основания магнита. Используя рис. 2, рассчитаем нормированную НСВМИ МППМ $B_{z,n}(x,y,z)$ в точке M(x,y,z), расположенной в заданной плоскости $z \ge H$.

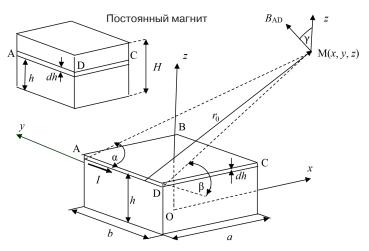


Рис. 2. Геометрическая схема расчета НСВМИ МППМ

В соответствии с методом эквивалентного соленоида [3–6] заменим постоянный магнит системой поверхностных электрических токов с линейной плотностью λ , текущих в плоскостях, перпендикулярных оси Oz. Тогда по полоске боковой поверхности постоянного магнита шириной dh, расположенной на высоте h от его основания, протекает поверхностный электрический ток силой $I = \lambda dh$. Периметр полоски образован отрезками AD, DC, CB, BA, где |AD| = |CB| = b, |DC| = |BA| = a.

Величина магнитной индукции $B_{AD}(x, y, z)$ тока I отрезка AD в точке M(x, y, z) определяется соотношением [3]:

$$B_{\rm AD}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\cos \alpha - \cos \beta}{r_0},\tag{1}$$

где r_0 – расстояние от точки M(x, y, z) до отрезка AD.

Вектор магнитной индукции B_{AD} направлен под углом γ к оси Oz.

С использованием рис. 2 получены следующие соотношения:

$$-\cos\beta = \frac{y + \frac{b}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + (z - h)^2}},$$
 (2)

$$\cos \alpha = \frac{\frac{b}{2} - y}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + (z - h)^2}},$$
(3)

$$\cos \gamma = \frac{x + \frac{a}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (z - h)^2}}.$$
(4)

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции $B_{\mathrm{AD}z}$, создаваемая электрическим током отрезка AD, определяется формулой:

$$B_{ADz}(x, y, z) = B_{AD}(x, y, z)\cos\gamma. \tag{5}$$

Нормальные составляющие вектора магнитной индукции электрических токов отрезков DC, CB, BA определяются таким же образом.

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции, создаваемая электрическим током I, протекающим по полоске шириной dh на высоте h постоянного магнита, является суммой НСВМИ электрических токов отрезков AD, DC, CB, BA:

$$B_{hz}(x, y, z) = B_{ADz}(x, y, z) + B_{DCz}(x, y, z) + B_{CBz}(x, y, z) + B_{BAz}(x, y, z).$$
(6)

В дальнейшем символами AD, DC, CB, BA будем обозначать боковые поверхности постоянного магнита, содержащие соответствующие отрезки.

С учетом (1)—(6) получим формулу для вычисления нормированной НСВМИ электрического тока боковой поверхности AD:

$$\frac{4\pi}{\mu_0 \lambda} \int_0^H B_{ADz}(x, y, z) dh = \left(\arcsin \frac{\alpha_{11} z}{\sqrt{(\alpha_{11}^2 + \beta_1^2)(\beta_1^2 + z^2)}} - \arcsin \frac{\alpha_{11} (z - H)}{\sqrt{(\alpha_{11}^2 + \beta_1^2)(\beta_1^2 + (z - H)^2)}} \right) + \left(\arcsin \frac{\alpha_{12} z}{\sqrt{(\alpha_{12}^2 + \beta_1^2)(\beta_1^2 + z^2)}} - \arcsin \frac{\alpha_{12} (z - H)}{\sqrt{(\alpha_{12}^2 + \beta_1^2)(\beta_1^2 + (z - H)^2)}} \right), \tag{7}$$

где
$$\alpha_{11} = \frac{b}{2} - y$$
, $\alpha_{12} = \frac{b}{2} + y$, $\beta_1 = x + \frac{a}{2}$.

Нормированная НСВМИ МППМ $B_{z\,n}(x,y,z)$ является суммой нормированных НСВМИ всех электрических токов боковых поверхностей постоянного магнита. С учетом (7) получим:

$$B_{zn}(x, y, z) = \sum_{i=1}^{4} \left(\arcsin \frac{\alpha_{i1}z}{\sqrt{(\alpha_{i1}^{2} + \beta_{i}^{2})(\beta_{i}^{2} + z^{2})}} - \arcsin \frac{\alpha_{i1}(z - H)}{\sqrt{(\alpha_{i1}^{2} + \beta_{i}^{2})(\beta_{i}^{2} + (z - H)^{2})}} \right) + \left(\arcsin \frac{\alpha_{i2}z}{\sqrt{(\alpha_{i2}^{2} + \beta_{i}^{2})(\beta_{i}^{2} + z^{2})}} - \arcsin \frac{\alpha_{i2}(z - H)}{\sqrt{(\alpha_{i2}^{2} + \beta_{i}^{2})(\beta_{i}^{2} + (z - H)^{2})}} \right) \operatorname{sign}(\beta_{i}) \right),$$
(8)

где
$$\alpha_{11} = \frac{b}{2} - y$$
, $\alpha_{12} = \frac{b}{2} + y$, $\beta_1 = x + \frac{a}{2}$ (для AD); $\alpha_{21} = x + \frac{a}{2}$, $\alpha_{22} = \frac{a}{2} - x$, $\beta_2 = y + \frac{b}{2}$ (для DC); $\alpha_{31} = y + \frac{b}{2}$, $\alpha_{32} = \frac{b}{2} - y$, $\beta_3 = \frac{a}{2} - x$ (для CB); $\alpha_{41} = \frac{a}{2} - x$, $\alpha_{42} = \frac{a}{2} + x$, $\beta_4 = \frac{b}{2} - y$ (для BA).

Нормальная составляющая вектора магнитной индукции электрического тока боковой поверхности СВ меняет знак при $x > \frac{a}{2}$, так же, как и НСВМИ электрического тока боковой поверхности ВА при $y > \frac{b}{2}$. Изменение знаков НСВМИ учитывается функцией $\operatorname{sign}(\beta_i)$.

 $B_{z\,\,\mathrm{n}}(x,\,y,\,z)$ является четной функцией координат x и y, следовательно, расчет распределения $B_{z\,\,\mathrm{n}}(x,\,y,\,z)$ в заданной плоскости можно делать только для ее четверти, ограниченной неравенствами: $0 \le x$, $0 \le y$. Для получения более удобного для дальнейших исследований выражения $B_{z\,\,\mathrm{n}}(x,\,y,\,z)$ формула (8) была разложена в ряд Тейлора, анализ которого показал, что формулу (8) можно заменить простой, удобной для расчетов формулой – аналитической моделью НСВМИ:

$$B_{z \text{ n.anal}}(x, y, z) = \begin{cases} B_{z \text{ n}}(0, 0, z) \left[\left(\frac{y}{y_{\text{max}}} \right)^2 - 1 \right]^2 \left[\left(\frac{x}{x_{\text{max}}} \right)^2 - 1 \right]^2 & \text{при } |x| \le x_{\text{max}}, \ |y| \le y_{\text{max}}, \\ 0 & \text{при } |x| > x_{\text{max}}, \ |y| > y_{\text{max}}, \end{cases}$$
 (9)

где x_{\max}, y_{\max} — «размеры» магнитного поля в плоскости z= const, т.е. координаты x_{\max}, y_{\max} , зависящие от координаты z, которые подбираются так, чтобы в области $|x| \ge x_{\max}$, $|y| \ge y_{\max}$ плоскости z= const НСВМИ МППМ становилась равной нулю.

На рис. 3 приведены графики зависимостей нормированной НСВМИ МППМ $B_{z\,n}(x,\,y,\,z)$ в плоскости z=13 мм в зависимости от координаты x при различных значениях координаты y, при следующих параметрах постоянного магнита: a=b=16 мм, H=8 мм. Значения $B_{z\,n}(x,y,z)$ для графиков 1,2,3 рассчитаны по точной формуле (8), а для графиков 4,5,6 – по формуле (9).

Анализ показал, что отличие результатов расчетов по точной формуле (8) от результатов расчетов по аппроксимирующей формуле (9) значительно для точек плоскости с координатами $x \ge 6$ мм, $y \ge 6$ мм, при которых относительная погрешность δ расчетов нормированной НСВМИ МППМ по аналитической модели принадлежит отрезку $15\% \le \delta \le 33\%$.

Для точек плоскости с координатами $x \le 6$ мм, $y \le 6$ мм относительная погрешность δ составила менее 15%, причем для точек плоскости, ограниченных неравенством $r \le 4$ мм, где r — расстояние от начала системы координат до точки плоскости, относительная погрешность составила $\delta \le 3.8\%$; для точек плоскости, ограниченных неравенством $r \le 2$ мм, относительная погрешность составила $\delta \le 2.6\%$.

Параметры информационного сигнала измерительной системы: амплитуда, форма зависимости

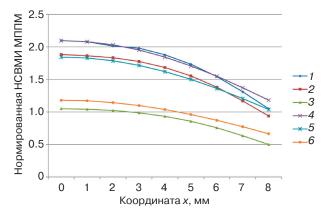


Рис. 3. Графики нормированной НСВМИ МППМ: $1-B_{Z\,n}(x,0,13), 2-B_{Z\,n}(x,4,13), \\ 3-B_{Z\,n}(x,8,13), 4-B_{Z\,n.anal}(x,0,13), \\ 5-B_{Z\,n.anal}(x,4,13), 6-B_{Z\,n.anal}(x,8,13)$

от времени на интервале его длительности, определяются скоростью изменения магнитных потоков в витках 1 и 2 при нахождении центра витка 2 над центром сечения постоянного магнита. В этом случае погрешность расчетов параметров информационного сигнала наименьшая, потому что магнитные потоки и скорость их изменений определяются в основном центральной частью распределения НСВМИ МППМ — в точках плоскости с координатами, ограниченными неравенствами $x \le 6$ мм, $y \le 6$ мм.

При больших значениях координат HCBMИ МППМ – периферийная часть МППМ, быстро уменьшается, а скорость изменения магнитных потоков, определяемая периферийной частью МППМ, меньше скорости изменения магнитных потоков, определяемой центральной частью МППМ.

Проведенные оценки погрешностей расчетов НСВМИ по аппроксимирующей формуле (9) показали возможность использования аналитической модели НСВМИ для разработки аналитической модели информационного сигнала измерительной системы с погрешностью расчетов значений информационного сигнала, не превышающей 15%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное следование позволяет сделать следующие выводы:

- 1. Методом эквивалентного соленоида получена точная аналитическая формула для расчета НСВМИ МППМ, имеющего форму параллелепипеда, перпендикулярной к заданной плоскости, параллельной торцу магнита.
- 2. Получено выражение аналитической модели НСВМИ, позволяющее относительно просто вычислять магнитные потоки в витках 1 и 2.
- 3. Обоснована возможность использования аналитической модели НСВМИ для теоретической разработки аналитической модели информационного сигнала измерительной системы с индукционной передачей сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Закатов М.М. Теоретические основы информационной системы с индукционной передачей сигнала. *Радиопромышленность*. 2001;1:29–39.
- 2. Закатов М.М. *Пассивный измеритель давления и температуры воздуха в шине колеса автомобиля*: пат. 2509656 РФ. Заявка № 2012140219/11; заявл. 20.09.2012, опубл. 20.03.2014. Бюл. 8.
- 3. Сивухин Д.В. Общий курс физики: в 5 т. Т. 3. Электричество. М.: Физматлит; 2004. 656 с.
- 4. Кустов М.С., Друина Д.В., Михайлова О.О., Поляков И.Г. Расчет магнитных полей однородно намагниченных тел методами эквивалентного соленоида и магнитных зарядов. *Вестник ТвГУ. Серия «Физика»*. 2010;8:17–35.
- 5. Erlichson H. The magnetic field of a circular turn. Am. J. Phys. 1989;57(7):607-608. https://doi.org/10.1119/1.15955
- 6. Воронцов А.А., Слесарев Ю.Н., Карпухин Э.В. Математическое моделирование магнитных полей двухкоординатных магнитострикционных наклономеров, содержащих постоянный магнит в форме прямоугольного параллелепипеда. Вестник Тамбовского ГТУ. 2013;19(1):25–29.
- 7. Воронцов А.А., Слесарев Ю.Н., Карпухин Э.В. Математическое моделирование магнитных полей двухкоординатных магнитострикционных наклономеров, содержащих кольцевой или сплошной постоянный магнит. *Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского.* 2012;30:467–472.
- 8. Ravaud R., Lemarquand G., Depollier C., et al. Analytical calculation of the magnetic field created by permanent-magnet rings. *IEEE Transact. Magnet.* 2008;44(8):1982–1989. https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.923096
- 9. Вагин Д.В., Герасименко Т.Н., Поляков П.А. Точное аналитическое выражение для индукции магнитного поля образца прямоугольной формы. *Вестник Московского университета*. *Серия 3: Физика. Астрономия*. 2008;6:53–55.
- 10. Xiao-Fan G., Yong Y., Xiao-Jing Z. Analytic expression of magnetic field distribution of rectangular permanent magnets. *Appl. Math. Mech.* 2004;25:297–306. https://doi.org/10.1007/BF02437333
- 11. Артамонов А. Н., Ерженин Н.Р., Закатов М.М. Аналитическая модель нормальной составляющей вектора магнитной индукции. В сб.: *Материалы XXVII Международной научно-практической конференции «Предупреждение, спасение, помощь»*. Химки; 2017. С. 5–9.
- 12. Резинкина М.М. Выбор параметров тонких электромагнитных экранов для снижения уровней магнитной индукции. Журн. техн. физики. 2014;84(2):1–7.
- 13. Резинкина М.М. Численный расчет магнитного поля и магнитного момента ферромагнитных тел сложной пространственной конфигурации. *Журн. техн. физики.* 2009;79(8):8–17.
- 14. Слесарев Ю.Н., Мартенс-Атюшева К.Ю., Родионов С.В. Исследование математических моделей магнитных полей двухкоординатных магнитострикционных наклономеров. *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе.* 2016;2(18):290–298.

- 15. Булыжев Е.М., Меньшов Е.Н., Джавахия Г.А. Моделирование поля постоянного магнита Известия Самарского научного центра РАН. 2011;13(4):106–110.
- 16. Черкасова О.А. Исследование магнитного поля постоянного магнита с помощью компьютерного моделирования. Гетеромагнитная микроэлектроника. 2014;17:112–120.
- 17. Матюк В.Ф., Осипов А.А., Стрелюхин А.В. Распределение намагниченности вдоль цилиндрического стержня, находящегося в продольном постоянном однородном магнитном поле. Электротехника. 2009;8:37–46.
- 18. Андреева Е.Г., Татевосян А.А., Семина И.А. Исследование осесимметричной модели магнитной системы открытого типа. *Омский научный вести*ик. 2010;1(87):110–113.
- 19. Лагутин А.С., Григорьев Г.Ю. Магнитная система поляризатора ядер ксенона. Прикладная физика. 2023;3:92-95.
- 20. Алиевский Б.Л., Орлов В.Л. Расчет параметров магнитных полей осесимметричных катушек. М.: Энергоатомиздат; 1983. 112 с.
- 21. Camacho J.M., Sosa V. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista Mexicana de Física E*. 2013;59(1):8–17. https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.21.020701
- 22. Семыкина И.Ю., Завьялов В.М., Дубков Е.А., Углова М.Б. Анализ распределения индукции магнитного поля в окрестностях катушки прямоугольного профиля системы беспроводной передачи энергии. В сб.: *Перспективные технологии и материалы: Материалы Международной научно-практической конференции.* Севастополь. 2022. С. 235–239.
- 23. Li B., Zhang J., Zhao X., Liu B., Dong H. Research on air gap magnetic field characteristics of trapezoidal Halbach permanent magnet linear synchronous motor based on improved equivalent surface current method. *Energies*. 2023;16(2):793–805. https://doi.org/10.3390/en16020793
- 24. Осипов В.В., Орлов А.Н., Лисенков В.В., Максимов Р.Н., Шитов В.А. Распределение магнитного поля в зазоре между двумя постоянными магнитами: расчетные и экспериментальные данные и их приложения. *Приборы и техника эксперимента*. 2023;6:111–118. https://doi.org/10.31857/S003281622306006X

REFERENCES

- 1. Zakatov M.M. Theoretical foundations of an information system with inductive signal transmission. *Radiopromyshlennost'* = *Radio Industry*. 2001;1:29–39 (in Russ.).
- 2. Zakatov M.M. Passive Automotive Tire Air Pressure and Temperature Meter: RF Pat. 2509656. Publ. 20.03.2014 (in Russ.).
- 3. Sivukhin D.V. *Obshchii kurs fiziki: Elektrichestvo (General Course of Physics: in 5 v. V. 3. Electricity*). Moscow: Fizmatlit; 2004. 656 p. (in Russ.).
- 4. Kustov M.S., Druina D.V., Mikhailova O.O., Polyakov I.G. Magnetic field calculation for uniformly magnetized bodies by the methods of equivalent solenoid and magnetic charges. *Vestnik TvGU. Seriya: Fizika = Bulletin of TvGU. Series: Physics*. 2010;8:17–35 (in Russ.).
- 5. Erlichson H. The magnetic field of a circular turn. Am. J. Phys. 1989;57(7):607-608. https://doi.org/10.1119/1.15955
- 6. Vorontsov A.A., Slesarev Yu.N., Karpushin E.V. Mathematical modeling of magnetic fields of two-axis magnetostrictive inclinometers containing constant magnet shaped as rectangular parallelepiped. *Vestnik TGTU = Transactions of the TSTU*. 2013;19(1):25–29 (in Russ.).
- 7. Vorontsov A.A., Slesarev Yu.N., Karpushin E.V. Mathematical modeling of magnetic fields of two-coordinate magnetostrictive tiltmeters containing a ring or solid permanent magnet. *Izvestiya Penzenskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta im. V.G. Belinskogo.* 2012;30:467–472 (in Russ.).
- 8. Ravaud R., Lemarquand G., Depollier C., et al. Analytical calculation of the magnetic field created by permanent-magnet rings. *IEEE Transact. Magnet.* 2008;44(8):1982–1989. https://doi.org/10.1109/TMAG.2008.923096
- 9. Vagin D.V., Gerasimenko T.N., Polyakov P.A. Exact analytical expression for magnetic field induction of rectangular shape sample. *Moscow Univ. Phys.* 2008;63(6):422–422. https://doi.org/10.3103/S0027134908060131 [Original Russian Text: Vagin D.V., Gerasimenko T.N., Polyakov P.A. Exact analytical expression for magnetic field induction of rectangular shape sample. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 3: Fizika. Astronomiya.* 2008;6:53–55 (in Russ.).]
- 10. Xiao-Fan G., Yong Y., Xiao-Jing Z. Analytic expression of magnetic field distribution of rectangular permanent magnets. *Appl. Math. Mech.* 2004;25:297–306. https://doi.org/10.1007/BF02437333
- 11. Artamonov A.N., Erzhenin N.R., Zakatov M.M. Analytical model of the normal component of the magnetic induction vector. In: *Proceedings of the 27th International Scientific-Practical Conference "Prevention. Salvation. Help."* Khimki; 2017. P. 5–9 (in Russ.).
- Rezinkina M.M. Parameters of thin electromagnetic shields that provide a decrease in magnetic induction. *Tech. Phys.* 2014;59(2):155–161. https://doi.org/10.1134/S1063784214020194
 [Original Russian Text: Rezinkina M.M. Parameters of thin electromagnetic shields that provide a decrease in magnetic induction. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2014;84(2):1–7 (in Russ.).]
- 13. Rezinkina M.M. Numerical calculation of the magnetic field and magnetic moment of ferromagnetic bodies of complex spatial configuration. *Tech. Phys.* 2009;54(8):1092–1101. https://doi.org/10.1134/S1063784209080027 [Original Russian Text: Rezinkina M.M. Numerical calculation of the magnetic field and magnetic moment of ferromagnetic bodies of complex spatial configuration. *Zhurnal tekhnicheskoi fiziki*. 2009;79(8):8–17 (in Russ.).]

- 14. Slesarev Yu.N., Martens-Atyusheva K.Yu., Rodionov S.V. Research of mathematical models of magnetic fields of two-coordinate magnetostriction tiltmeters. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, Systems, Networks in Economics, Technology, Nature and Society.* 2016;2(18):290–298 (in Russ.).
- 15. Bulyzhev E.M., Menshov E.N., Dzhavakhiya G.A. Modeling the field permanent magnet. *Izvestiya Samarskogo nauchnogo tsentra RAN = Izvestiya of Samara Scientific Center of the Russian Academy of Sciences*. 2011;13(4):106–110 (in Russ.).
- 16. Cherkasova O.A. Research of the magnetic field of the permanent magnet by means of computer modeling. *Geteromagnitnaya* mikroelektronika = Heteromagnetic Microelectronics. 2014;17:112–120 (in Russ.).
- 17. Matyuk V.F., Osipov A.A., Strelyukhin A.V. Magnetization distribution along the cylindrical rod in longitudinal constant uniform magnetic field. *Russ. Electr. Eng.* 2009;80(8):450–458. https://doi.org/10.3103/S1068371209080082 [Original Russian Text: Matyuk V.F., Osipov A.A., Strelyukhin A.V. Magnetization distribution along the cylindrical rod in longitudinal constant uniform magnetic field. *Elektrotekhnika*. 2009;8:37–46 (in Russ.).]
- 18. Andreeva E.G., Tatevosyan A.A., Semina I.A. Research of the axisymmetric model of an open-type magnetic system. *Omskii nauchnyi vestnik = Omsk Scientific Bulletin.* 2010;1(87):110–113 (in Russ.).
- 19. Lagutin A.S., Grigoriev G.Yu. Magnetic system of the xenon core polarizer. *Prikladnaya fizika = Appl. Phys.* 2023;3:92–95 (in Russ.).
- 20. Alievskii B.L., Orlov V.L. Raschet parametrov magnitnykh polei osesimmetrichnykh katushek (Calculation of Magnetic Field Parameters of Axisymmetric Coils). Moscow: Energoatomizdat; 1983. 112 p. (in Russ.).
- 21. Camacho J.M., Sosa V. Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry. *Revista Mexicana de Fisica E.* 2013;59(1):8–17. https://doi.org/10.31349/RevMexFisE.21.020701
- 22. Semykina I.Yu., Zav'yalov V.M., Dubkov E.A., Uglova M.B. Analysis of the magnetic field induction distribution in the vicinity of a rectangular coil profile of a wireless power transmission system. In: *Proceedings of the International Scientific and Practical Conference "Advanced Technologies and Materials.*" Sevastopol. 2022. P. 235–239 (in Russ.).
- 23. Li B., Zhang J., Zhao X., Liu B., Dong H. Research on air gap magnetic field characteristics of trapezoidal Halbach permanent magnet linear synchronous motor based on improved equivalent surface current. *Energies*. 2023;16(2):793–805. https://doi.org/10.3390/en16020793
- 24. Osipov V.V., Orlov A.N., Lisenkov V.V., et al. Distribution of the Magnetic Field in the Gap between Two Permanent Magnets: Calculated and Experimental Data and Their Applications. *Instrum. Exp. Tech.* 2023;66(6):995–1002. https://doi.org/10.1134/S0020441223060064 [Original Russian Text: Osipov V.V., Orlov A.N., Lisenkov V.V., Maksimov R.N., Shitov V.A. Distribution of the Magnetic Field in the Gap between Two Permanent Magnets: Calculated and Experimental Data and Their Applications. *Pribory i tekhnika eksperimenta.* 2023;6:111–118 (in Russ.). https://doi.org/10.31857/S003281622306006X]

Об авторе

Закатов Михаил Михайлович, к.т.н., старший научный сотрудник, доцент, кафедра механики и инженерной графики, ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты Министерства Российской Федерации по делам гражданской обороны, чрезвычайным ситуациям и ликвидации последствий стихийных бедствий имени генерал-лейтенанта Д.И. Михайлика» (ФГБВОУ ВО «Академия гражданской защиты МЧС России») (141435, Россия, Московская обл., г.о. Химки, мкр. Новогорск, ул. Соколовская, стр. 1). E-mail: zakatov46@mail.ru. https://orcid.org/0009-0006-1249-8039

About the Author

Mikhail M. Zakatov, Cand. Sci. (Eng.), Senior Researcher, Associate Professor, Department of Mechanics and Engineering Graphics, Civil Defence Academy EMERCOM of Russia (1, Sokolovskaya ul., mkr. Novogorsk, Khimki, Moscow oblast, 141435 Russia). E-mail: zakatov46@mail.ru. https://orcid.org/0009-0006-1249-8039

Математическое моделирование Mathematical modeling

УДК 538.93 https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-5-95-103 EDN YKAHQQ



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Исследование теплопереноса в пористой среде с упорядоченной макроструктурой на основе гироида

А.И. Попов[®], А.В. Еремин

Самарский государственный технический университет, Самара, 443100 Россия

[®] Автор для переписки. e-mail: popov.ai@samqtu.ru

• Поступила: 27.12.2024 • Доработана: 10.03.2025 • Принята к опубликованию: 23.07.2025

Резюме

Цели. Трижды периодические минимальные поверхности – это непересекающиеся поверхности с нулевой средней кривизной, состоящие из повторяющихся в трех направлениях декартовой системы координат элементов. Использование конструкций, основанных на минимальных поверхностях, в теплотехническом оборудовании связано с их преимуществами перед классическими решетчатыми и сотовыми конструкциями, часто применяемыми на практике. Целью работы является исследование теплопереноса при фильтрационном течении несжимаемой жидкости в пористой среде с упорядоченной макроструктурой на основе трижды периодической минимальной поверхности (гироида).

Методы. Для решения задачи теплопереноса в пористой среде применяется метод конечных разностей. Для реализации алгоритма метода конечных разностей разработано программное обеспечение *Heat Transfer Solver* на языке программирования Python.

Результаты. В рамках настоящего исследования разработано программное обеспечение на языке программирования Руthon для численного решения методом конечных разностей задачи теплопереноса в пористой среде с упорядоченной макроструктурой. Функционал программы позволяет исследовать динамику процесса теплопереноса и влияние различных параметров на распределение температуры. При помощи данной программы изучен процесс теплопереноса в пористой среде на основе гироида. Получены графические зависимости температуры твердотельного каркаса и жидкости, а также теплового потока от координаты в различные моменты времени. Определены характерные временные интервалы, в которых наблюдается наибольшее абсолютное значение градиента температур.

Выводы. Результаты работы, включающие как разработанное программное обеспечение, так и зависимости температур, могут найти применение в ряде инженерных задач, где важным является прогнозирование температурного распределения в пористых материалах при различных условиях эксплуатации.

Ключевые слова: пористая среда, течение жидкости, теплообмен, трижды периодическая минимальная поверхность, гироид, метод конечных разностей

Для цитирования: Попов А.И., Еремин А.В. Исследование теплопереноса в пористой среде с упорядоченной макроструктурой на основе гироида. *Russian Technological Journal*. 2025;13(5):95–103. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-5-95-103, https://www.elibrary.ru/YKAHQQ

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Heat transfer in a porous medium having an ordered gyroid-based macrostructure

Andrey I. Popov [®], Anton V. Eremin

Samara State Technical University, Samara, 443100 Russia [®] Corresponding author, e-mail: popov.ai@samgtu.ru

• Submitted: 27.12.2024 • Revised: 10.03.2025 • Accepted: 23.07.2025

Abstract

Objectives. Triply periodic minimal surfaces are non-intersecting surfaces with zero mean curvature, consisting of elements repeating in three directions of the Cartesian coordinate system. The use of structures based on minimal surfaces in heat engineering equipment is associated with their advantages over classical lattice and honeycomb structures, often used in practice. The aim of the work is to study heat transfer during filtration flow in a porous medium of an incompressible fluid having an ordered macrostructure based on gyroid triply periodic minimal surface.

Methods. In order to solve the problem of heat transfer in a porous medium, the finite difference method is used. As a means of implementing the finite difference method algorithm, the *Heat Transfer Solver* software was developed in the Python programming language.

Results. The described software program was used to obtain a numerical solution of the heat transfer problem in a porous medium with an ordered macrostructure using the finite difference method. The program functionality enables the investigation of the heat transfer process dynamics and the influence of various parameters on the temperature distribution. The program was used to study the heat transfer process in a porous medium based on gyroid triply periodic minimal surface. Graphical dependencies of the solid framework and fluid temperatures, as well as the heat flux on the coordinate at different time steps, were obtained. Characteristic time intervals with the highest absolute temperature gradient values were identified.

Conclusions. The results of the work, including both the developed software and the obtained temperature dependencies, can be used in a number of engineering problems where it is important to predict the temperature distribution in porous materials under various operating conditions.

Keywords: porous medium, fluid flow, heat transfer, triply periodic minimal surface, gyroid, finite difference method

For citation: Popov A.I., Eremin A.V. Heat transfer in a porous medium having an ordered gyroid-based macrostructure. *Russian Technological Journal.* 2025;13(5):95–103. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-5-95-103, https://www.elibrary.ru/YKAHQQ

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время важной задачей в теоретической и прикладной теплотехнике является повышение энергетической эффективности теплотехнического оборудования [1], которое широко используется в различных отраслях промышленности. Одним из методов интенсификации теплообмена является применение пористых материалов в конструкции теплообменных устройств [2], катализаторов [3] и т.д. Повышение площади поверхности теплообмена и турбулизация потока являются основными причинами использования пористых материалов в тракте теплообменников.

Большинство применяемых на практике пористых материалов обладают стохастической структурой, или, иными словами, случайной формой и размерами пор. Однако существуют целые классы пористых материалов с упорядоченной структурой, к которым, например, относятся решетчатые и сотовые конструкции [4, 5], а также конструкции на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП). Такие поверхности являются предметом большого числа исследований [6-11] ввиду своих превосходных прочностных свойств при высоком значении пористости, что позволяет проектировать легкие, но при этом прочные конструкции. Одним из преимуществ пористых материалов с ТПМП-структурой также является возможность варьирования их свойств (теплофизических, механических и др.) путем изменения характерных геометрических параметров минимальных поверхностей [8].

Несмотря на вышеуказанные преимущества, при использовании пористых ТПМП-материалов в конструкции теплотехнического оборудования можно столкнуться с рядом трудностей ввиду отсутствия математических моделей, описывающих процессы переноса (тепла, массы, импульса), поскольку это влечет за собой большие затраты времени и ресурсов на изготовление опытных образцов и проведение натурных экспериментов. В связи с этим важной задачей является математическое моделирование тепломассопереноса в пористых средах, структура которых основана на ТПМП.

Для решения задач тепломассопереноса применяются как численные, так и аналитические методы [12–14]. Аналитические методы, например, метод разделения переменных и метод интегральных преобразований позволяют получать точные решения в частных случаях. Однако такие методы применимы только к ограниченному числу задач с определенными ограничениями и условиями. В связи с этим при решении сложных задач (с нелинейными свойствами или сложной геометрией) на практике часто применяются численные методы (метод конечных разностей, метод конечных

элементов и др.) [15, 16], позволяющие находить приближенные решения с заданной точностью.

В настоящей работе при помощи метода конечных разностей решена одномерная задача теплопереноса в пористой среде, структура которой основана на ТПМП вида гироид, при течении несжимаемой жидкости.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе рассматривается теплообмен в пористой среде со структурой, основанной на гироиде [17, 18], при низкой скорости течения жидкости, характерной для фильтрационных течений. Схема задачи изображена на рис. 1. На рис. 1а изображена элементарная ячейка гироида, характерными геометрическим параметрами которой являются толщина стенки δ и длина ребра куба a, в который вписана ячейка. При варьировании данных параметров изменяется пористость материала, что оказывает влияние как на гидродинамические характеристики потока, так и на интенсивность теплоотдачи.

Пористая среда, через которую протекает жидкость, изображена на рис. 16. Решетка ТПМП образуется путем копирования элементарной ячейки (рис. 1a) в ортогональных направлениях декартовой системы координат с периодом равным *a*.

Для описания теплообмена при течении жидкости через пористую среду воспользуемся двухтемпературной моделью, предложенной Wakao N. и Kagei S. [19]. Двухтемпературная модель позволяет описывать каждый компонент пористой среды (твердое тело и жидкость) с использованием отдельных уравнений энергии для каждой фазы, что дает возможность более точно описывать процесс теплообмена, в особенности при отсутствии локального равновесия.

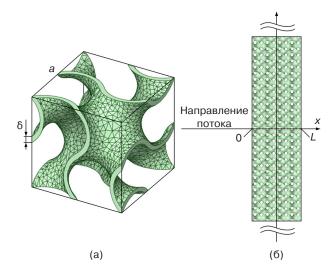


Рис. 1. Схема задачи: (а) элементарная ячейка гироида, (б) пористая ТПМП-среда. x – координата, L – толщина пористого материала

Математическая постановка задачи, включающая основные дифференциальные уравнения, а также начальные и граничные условия, имеет вид:

$$(1 - \phi)(\rho c_{\mathbf{p}})_{\mathsf{T}} \frac{\partial T_{\mathsf{T}}(x, t)}{\partial t} =$$

$$= \lambda_{\vartheta \varphi \varphi, \mathsf{T}} \frac{\partial^{2} T_{\mathsf{T}}(x, t)}{\partial x^{2}} + \alpha_{\mathsf{T}, \mathsf{W}} (T_{\mathsf{W}}(x, t) - T_{\mathsf{T}}(x, t)), \quad (1)$$

$$(0 < x < L, t > 0);$$

$$\phi(\rho c_{p})_{*}\left[\frac{\partial T_{*}(x,t)}{\partial t} + u\frac{\partial T_{*}(x,t)}{\partial x}\right] =$$

$$= \lambda_{9\phi\phi.*}\frac{\partial^{2} T_{*}(x,t)}{\partial x^{2}} + \alpha_{\text{T.*}}(T_{\text{T}}(x,t) - T_{*}(x,t)), \quad (2)$$

$$(0 < x < L, t > 0);$$

$$T_{\mathrm{T}}(x,0) = T_{\mathrm{w}}(x,0) = T_{0};$$
 (3)

$$-\lambda_{\mathrm{T}} \frac{\partial T_{\mathrm{T}}(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha_{1}(T_{1} - T_{\mathrm{T}}(0,t)); \tag{4}$$

$$\lambda_{\mathrm{T}} \frac{\partial T_{\mathrm{T}}(x,t)}{\partial x} \bigg|_{\mathbf{r}=L} = \alpha_{2} (T_{2} - T_{\mathrm{T}}(L,t)); \tag{5}$$

$$T_{\mathbf{x}}(0,t) = T_1;$$
 (6)

$$\left. \frac{\partial T_{\mathbf{x}}(x,t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \tag{7}$$

где t — время; $T_{\rm T}(x,\,t),\,T_{\rm ж}(x,\,t)$ — функции температур твердотельного каркаса и жидкости соответственно; ф — пористость; u — скорость потока жидкости; $(\rho c_{\rm p})_{\rm T},\,(\rho c_{\rm p})_{\rm ж}$ — плотность и теплоемкость твердого материала и жидкости соответственно; $\lambda_{\rm эфф.T},\,\lambda_{\rm эфф.ж}$ — эффективная теплопроводность твердотельного каркаса и жидкости; $\lambda_{\rm T}$ — теплопроводность твердого материала; T_0 — начальная температура; $T_1,\,T_2$ — температуры окружающих сред до и после пористой зоны; $\alpha_{\rm T.ж}$ — коэффициент теплоотдачи между жидкостью и твердотельным каркасом; α_1 — коэффициент теплоотдачи на границе твердотельного каркаса и окружающей среды в точке x=0; α_2 — коэффициент теплоотдачи на границе твердотельного каркаса и окружающей среды в точке x=L.

Стоит отметить, что задача теплопереноса рассматривается отдельно от задачи переноса массы в пористой среде, и, соответственно, в систему уравнений не включены уравнения сохранения массы и импульса. Это связано с тем, что в некоторых частных случаях динамика течения может оказывать малое влияние на тепловые эффекты. Кроме того, свойства жидкости и твердого тела изменятся незначительно в диапазоне рассматриваемых температур, поэтому функции для описания зависимости свойств соответствующих фаз от температуры также не включены в постановку задачи.

В качестве начального условия как для твердого тела, так и для жидкости принята одинаковая температура T_0 . На границах твердотельного каркаса (в точках x=0 и x=L) задается граничное условие 3-го рода. Температура жидкости в точке x=0 имеет постоянное значение, которое соответствует температуре окружающей среды на входе в пористую зону. Поскольку нет явных данных о температуре жидкости в точке x=L, предположим, что тепловой поток на границе равен нулю.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Решение задачи (1)—(7) осуществляется методом конечных разностей. Для этого введем в рассмотрение пространственно-временную сетку, где N — количество шагов по координате, а M — по времени:

$$x^{i} = i\Delta x, \quad i \in [0, N],$$

 $t^{n} = n\Delta t, \quad n \in [0, M],$

где Δx , Δt — шаги по координате и времени соответственно.

Конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений (1), (2) и краевых условий (3)–(7) следующая:

$$\begin{split} &(1-\phi)(\rho c_{\rm p})_{\rm T} \Bigg[\frac{T_{\rm T}^{n+1,i} - T_{\rm T}^{n,i}}{\Delta t} \Bigg] = \\ &= \lambda_{\ni \Phi \Phi, \rm T} \Bigg[\frac{T_{\rm T}^{n,i-1} - 2T_{\rm T}^{n,i} + T_{\rm T}^{n,i+1}}{\Delta x^2} \Bigg] + \alpha_{\rm T.M} (T_{\rm M}^{n,i} - T_{\rm T}^{n,i}); \end{split}$$

$$\begin{split} & \phi(\rho c_{\rm p})_{\rm w} \left[\frac{T_{\rm w}^{n+1,i} - T_{\rm w}^{n,i}}{\Delta t} + u \frac{T_{\rm w}^{n,i+1} - T_{\rm w}^{n,i}}{\Delta x} \right] = \\ & = \lambda_{\rm 9 d \cdot w} \left[\frac{T_{\rm w}^{n,i-1} - 2T_{\rm w}^{n,i} + T_{\rm w}^{n,i+1}}{\Delta x^2} \right] + \alpha_{\rm \tiny T.W} (T_{\rm \tiny T}^{n,i} - T_{\rm w}^{n,i}); \end{split}$$

$$T_{\rm T}^{0,i} = T_{\rm x}^{0,i} = T_0; \tag{10}$$

$$-\lambda_{\rm T} \frac{T_{\rm T}^{n,1} - T_{\rm T}^{n,0}}{\Delta x} = \alpha_1 (T_1 - T_{\rm T}^{n,0}); \tag{11}$$

$$\lambda_{\rm T} \frac{T_{\rm T}^{n,N} - T_{\rm T}^{n,N-1}}{\Lambda r} = \alpha_2 (T_2 - T_{\rm T}^{n,N}); \tag{12}$$

$$T_{\mathbf{x}}^{0,i} = T_1;$$
 (13)

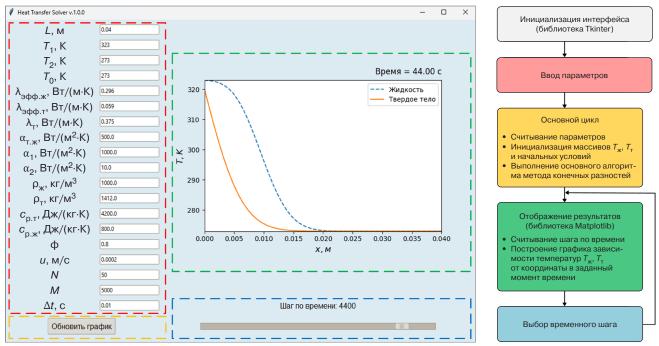


Рис. 2. Интерфейс и алгоритм разработанной программы

$$\frac{T_{\mathbb{K}}^{n,N} - T_{\mathbb{K}}^{n,N-1}}{\Lambda r} = 0. \tag{14}$$

Задача решается в соответствии с явной схемой для получения значений температур $T_{\rm ж}$ и $T_{\rm T}$ в каждом узле сетки на каждом временном шаге. Явная схема была выбрана благодаря ее простой реализации и достаточной точности для рассматриваемой задачи. При этом устойчивость решения обеспечивается подбором шага по времени Δt в зависимости от Δx в соответствии с критерием Куранта.

Для реализации алгоритма решения поставленной задачи методом конечных разностей разработано программное обеспечение на языке программирования Python. Графический интерфейс программы представлен на рис. 2. Для его построения использовалась библиотека Tkinter. В основном цикле программы можно выделить следующие этапы:

- 1. Ввод основных параметров задачи через специальные текстовые поля. Функционал программы позволяет вручную задавать как теплофизические свойства исследуемых материалов, так и размер пространственно-временной сетки.
- 2. Считывание параметров, инициализация массивов для $T_{\rm ж}$, $T_{\rm T}$ и выполнение основного цикла метода конечных разностей. Конечно-разностная схема для основных дифференциальных уравнений (8), (9) и граничных условий (11), (12), (14) на языке программирования Python представлена на рис. 3.
- 3. Визуализация результатов, включающая построение графика изменения температуры твердотельного каркаса и жидкости в пределах рассматриваемой области. Для отображения интерактивного графика изменения температуры в пористой среде использовалась библиотека Matplotlib.

Рис. 3. Конечно-разностная схема на языке программирования Python

Пользователь имеет возможность управлять отображением графика через слайдер, изменяя временной шаг и мгновенно обновляя графики температурных полей. Это позволяет исследовать динамику процесса теплопереноса и влияние различных параметров на распределение температуры.

Программа была протестирована на корректность путем сравнения численных решений с известными аналитическими решениями для частных случаев задачи. Исходный код, а также исполняемый файл программы представлены на платформе Mendeley Data¹ [20].

РЕЗУЛЬТАТЫ

При помощи разработанной программы была решена задача теплопереноса в пористой среде, структура которой основана на гироиде. Получены графизависимости изменения температуры твердотельного каркаса и жидкости. В частности, представлен график зависимости температуры жидкости и твердотельного каркаса от координаты в различные моменты времени (рис. 4). Данный график был получен при следующих константах и значениях теплофизических свойств твердотельного каркаса и жидкости, а также граничных и начальных условиях: $c_{\rm p.t} = 800$ Дж/(кг · К), $\rho_{\rm t} = 1412$ кг/м³, $\lambda_{\rm T} = 0.375$ Вт/(м·К), $c_{\rm p.ж} = 4200$ Дж/(кг·К), $\rho_{\rm m} = 1000 \, {\rm kg/m^3}, \, \lambda_{\rm m}^{\rm rm} = 0.6$ $B_T/(M \cdot K)$, $\lambda_{3\phi\phi,x} = 0.296 \text{ BT/(M} \cdot \text{K)}, \ \lambda_{3\phi\phi,T} = 0.059 \text{ BT/(M} \cdot \text{K)}, \ \phi = 0.8, \ L = 0.04 \text{ M}, \ T_0 = 273 \text{ K}, \ T_1 = 323 \text{ K}, \ T_2 = 273 \text{ K}, \ \alpha_1 = 1000 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K)}, \ \alpha_2 = 10 \text{ BT/(M}^2 \cdot \text{K)},$ $\alpha_{\text{т.ж}} = 500 \text{ Br/(м}^2 \cdot \text{K}), u = 0.0002 \text{ м/с}.$ Коэффициенты эффективной теплопроводности твердой и жидкой фазы в пористом материале со структурой, основанной на гироиде, определялись в соответствии с методикой, представленной в [21].

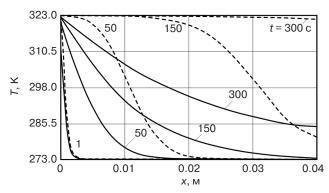


Рис. 4. График распределения температуры в пористой среде:
----- твердотельный каркас; - - - - жидкость

Из графика на рис. 4 видно, что при заданных условиях температуры жидкости и твердого каркаса значительно отличаются во всем диапазоне пространственной координаты, что подчеркивает важность использования двухтемпературной модели для точного описания распределения температур в пористых средах.

График на рис. 5 демонстрирует изменение температуры в различных точках пористого материала, а именно, в начале, в середине и в конце рассматриваемой области. Из анализа данного графика можно заключить, что при заданных условиях теплообмена температура жидкости значительно быстрее достигает максимального значения, заданного граничным условием ($T_1 = 323 \, \mathrm{K}$). При $t > 300 \, \mathrm{c}$ температурные кривые жидкости и твердотельного каркаса начинают сближаться, что свидетельствует о снижении абсолютного значения градиента температур и приближении к термодинамическому равновесию в системе.

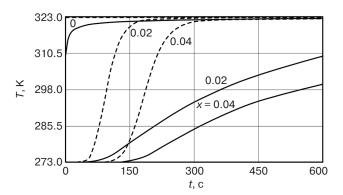


Рис. 5. График изменения температуры в пористой среде во времени:
---- твердотельный каркас; - - - жидкость

На рис. 6 представлен график распределения теплового потока, определяемого в соответствии с законом Ньютона — Рихмана ($|q| = \alpha_{_{\mathrm{T},\mathrm{H}}}(T_{_{\mathrm{H}}} - T_{_{\mathrm{T}}})$), в пористом материале по координате. На ранних этапах процесса ($t \approx 10$ с) распределение теплового потока имеет выраженный пик вблизи левой границы области, что связано с большим абсолютным значением градиента температуры, вызванным принятием граничного условия 1-го рода в точке x = 0. По мере увеличения времени (10 c < t < 200 c) наблюдается рост теплового потока со смещением пикового значения к правой границе области. Наибольшая эффективность процесса отмечается в момент времени $t \approx 200$ с, за которым следует постепенное снижение интенсивности теплообмена, поскольку температура жидкости к этому моменту имеет максимально возможное значение во всем диапазоне х, что также видно на рис. 3.

¹ https://data.mendeley.com/datasets/kcn33tr7sb/2. Дата обращения 23.07.2025. / Accessed July 23, 2025.

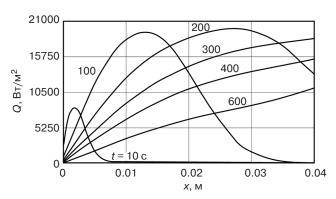


Рис. 6. График распределения теплового потока

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье представлено исследование теплопереноса в пористой среде с упорядоченной макроструктурой, основанной на гироиде, при фильтрационном течении. Для математического моделирования исследуемого процесса использовалась двухтемпературная модель Wakao N. и Kagei S.

Для численного решения поставленной задачи теплопереноса в пористой среде (1)-(7) методом конечных разностей была разработана программа на языке программирования Python. Функционал разработанной программы предусматривает построение графика температуры твердотельного каркаса и жидкости, а встроенный в него слайдер временного шага позволяет визуализировать изменение температурных кривых, что важно для исследования динамики процесса теплопереноса. Главным преимуществом программы является возможность быстро, в отличие от прямых методов моделирования (например, методом конечных элементов в $ANSYS^2$), получить решение поставленной задачи, что достигается за счет отсутствия необходимости в построении вычислительной геометрии и расчетной сетки.

Пористые материалы со структурой на основе ТПМП, таких как гироид, могут быть использованы в проектировании теплообменников, катализаторов и других устройств, где важно минимизировать массу конструкции без ущерба для ее прочности

и эффективности. Моделирование теплопереноса в пористых ТПМП с использованием разработанной программы позволяет быстро прогнозировать их поведение в реальных условиях эксплуатации, что важно для ряда инженерных задач в энергетике, химической промышленности, машиностроении и других отраслях.

Результаты данной работы могут стать базисом для дальнейших научных исследований в области моделирования тепломассопереноса в пористых средах. В перспективе возможно расширение модели и программы за счет учета уравнения движения жидкости в пористой среде, что позволит определять как профиль скорости, так и потери давления. Также перспективным направлением может стать разработка аналогичных моделей для других видов минимальных поверхностей, что позволит подбирать структуры с необходимыми характеристиками по теплопередаче, прочности и массе в зависимости от поставленных инженерных задач.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено за счет Российского научного фонда, грант № 23-79-10044, https://rscf.ru/project/23-79-10044/.

ACKNOWLEDGMENTS

The study was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 23-79-10044, https://rscf.ru/project/23-79-10044/.

Вклад авторов

А.И. Попов – проведение исследования, написание рукописи, разработка программы, оформление рисунков, редактирование статьи.

А.В. Еремин – постановка задачи, привлечение финансирования, редактирование статьи.

Authors' contributions

A.I. Popov – researching, writing the manuscript, developing of the program, visualization, and editing the article.

A.V. Eremin – task statement, funding acquisition, and editing the article.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Попов И.А., Гортышов Ю.Ф., Олимпиев В.В. Промышленное применение интенсификации теплообмена современное состояние проблемы (Обзор). *Теплоэнергетика*. 2012;1:3–14.
- 2. Соловьев С.А., Соловьева О.В., Шакурова Р.З., Голубев Я.П. Обзор применения высокопористых ячеистых теплообменников. *Известия высших учебных заведений*. *ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ*. 2024;26(1):165–194. https://doi.org/10.30724/1998-9903-2024-26-1-165-194

² https://www.cadfem-cis.ru/ (in Russ.). Дата обращения 21.07.2025. / Accessed July 21, 2025.

- 3. Кугатов П.В. Использование пористых углеродных материалов в качестве носителей для катализаторов. *Башкирский химический журнал*. 2011;18(1):98–105.
- 4. Тестоедов Н.А., Наговицин В.Н., Пермяков М.Ю. Применение трехслойных сотовых конструкций в космических аппаратах. Сибирский аэрокосмический журнал. 2016;17(1):200–211.
- 5. Соловьева О.В., Соловьев С.А., Шакурова Р.З. Обзор современных керамических ячеистых материалов и композитов, применяемых в теплотехнике. *Известия высших учебных заведений*. *ПРОБЛЕМЫ ЭНЕРГЕТИКИ*. 2023;25(1): 82–104. https://doi.org/10.30724/1998-9903-2023-25-1-82-104
- 6. Брагин Д.М., Еремин А.В., Попов А.И., Шульга А.С. Метод определения коэффициента эффективной теплопроводности пористого материала на основе минимальной поверхности типа Schoen's I-WP(R). *Вестик ИГЭУ*. 2023;2: 61–68. https://doi.org/10.17588/2072-2672.2023.2.061-068
- 7. Зинина С.А., Попов А.И., Еремин А.В. Численное решение нелинейной задачи теплопроводности в пористой пластине с упорядоченной макроструктурой. *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*. 2024;1:53–67. https://doi.org/10.26456/vtpmk702
- 8. Попов А.И. Разработка тепловой изоляции с упорядоченной структурой, основанной на ТПМП Неовиуса. *Вестник ИГЭУ*. 2022;6:58–68.
- 9. Al-Ketan O., Abu Al-Rub R.K. Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices. *Adv. Eng. Mater.* 2019;21(10):1900524. https://doi.org/10.1002/adem.201900524
- 10. Schoen A.H. Reflections concerning triply-periodic minimal surfaces. *Interface Focus*. 2012;2(5):658–668. https://doi.org/10.1098/rsfs.2012.0023
- 11. Abueidda D.W., Bakir M., Al-Rub R.K.A., Bergström J.S., Sobh N.A., Jasiuk I. Mechanical properties of 3D printed polymeric cellular materials with triply periodic minimal surface architectures. *Materials & Design*. 2017;122(9):255–267. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.03.018
- 12. Карташов Э.М. Математические модели теплопроводности с двухфазным запаздыванием. *Инженерно-физический журнал*. 2016;89(2):338–349.
- 13. Карташов Э.М., Кротов Г.С. Аналитическое решение однофазной задачи Стефана. *Математическое моделирование*. 2008;20(3):77–86.
- 14. Карташов Э.М. Аналитические подходы к исследованиям нестационарной теплопроводности для частично ограниченных областей. *Теплофизика высоких температур.* 2020;58(3):402–411. https://doi.org/10.31857/S0040364420030084
- 15. Коренченко А.Е., Жукова А.А. Испарение жидкой лежащей капли в условиях вынужденной конвекции. Russ. Technol. J. 2021;9(5):57–66. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-57-66
- 16. Глинский И.А., Зенченко Н.В., Мальцев П.П. Тепловое моделирование терагерцового квантового-каскадного лазера на основе наногетероструктуры GaAs/AlGaAs. *Rossiiskii Tekhnologicheskii Zhurnal*. 2016;4(3):27–36. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2016-4-3-27-36
- 17. Hayashi K., Kishida R., Tsuchiya A., Ishikawa K. Superiority of triply periodic minimal surface gyroid structure to strutbased grid structure in both strength and bone regeneration. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2023;15(29):34570–34577. https://doi.org/10.1021/acsami.3c06263
- 18. Chouhan G., Bala Murali G. Designs, advancements, and applications of three-dimensional printed gyroid structures: A review. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*. 2024;238(2):965–987. https://doi.org/10.1177/09544089231160030
- 19. Wakao N., Kagei S. Heat and Mass Transfer in Packed Beds. Taylor & Francis; 1982. 364 p.
- 20. Popov A.I. Heat Transfer Solver. V. 1. Mendeley Data. 2024. https://www.doi.org/10.17632/kcn33tr7sb.1
- 21. Bragin D.M., Popov A.I., Eremin A.V. The thermal conductivity properties of porous materials based on TPMS. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2024;231:125863. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125863

REFERENCES

- 1. Popov I.A., Gortyshov Yu.F., Olimpiev V.V. Industrial application of heat transfer enhancement: The modern state of the problem (a Review). *Therm. Eng.* 2012;59(1):1–12. https://doi.org/10.1134/S0040601512010119 [Original Russian Text: Popov I.A., Gortyshov Yu.F., Olimpiev V.V. Industrial application of heat transfer enhancement: The modern state of the problem (a Review). *Teploenergetika*. 2012;1:3–14 (in Russ.).]
- 2. Solovev S.A., Soloveva O.V., Shakurova R.Z., Golubev Ya.P. Overview of the application of open cell foam heat exchangers. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. PROBLEMY ENERGETIKI = Power Engineering: Research, Equipment, Technology.* 2024;26(1):165–194 (in Russ.). https://doi.org/10.30724/1998-9903-2024-26-1-165-194
- 3. Kugatov P.V. Use of porous carbon materials as carriers for catalysts. *Bashkirskii khimicheskii zhurnal = Bashkir Chemical Journal*. 2011;18(1):98–105 (in Russ.).
- 4. Testoedov N.A., Nagovitsin V.N., Permyakov M.Yu. Spacecraft application of three layer honeycomb structures. *Sibirskii aerokosmicheskii zhurnal = Siberian Aerospace Journal*. 2016;17(1):200–211 (in Russ.).
- 5. Solovev S.A., Soloveva O.V., Shakurova R.Z. Review of modern ceramic cellular materials and composites used in heat engineering. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. PROBLEMY ENERGETIKI = Power Engineering: Research, Equipment, Technology.* 2023;25(1):82–104 (in Russ.). https://doi.org/10.30724/1998-9903-2023-25-1-82-104

- 6. Bragin D.M., Eremin A.V., Popov A.I., Shulga A.S. Method to determine effective thermal conductivity coefficient of porous material based on minimum surface Schoen's I-WP(R) type. *Vestnik IGEU*. 2023;2:61–68 (in Russ.). https://doi.org/10.17588/2072-2672.2023.2.061-068
- 7. Zinina S.A., Popov A.I., Eremin A.V. Numerical solution of the nonlinear problem of thermal conductivity in a porous plate with an ordered macrostructure. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika = Herald of Tver State University. Ser.: Appl. Math.* 2024;1:53–67. https://doi.org/10.26456/vtpmk702
- 8. Popov A.I. Development of thermal insulation with ordered structure based on Neovius TPMS. *Vestnik IGEU*. 2022;6:58–68 (in Russ.).
- 9. Al-Ketan O., Abu Al-Rub R.K. Multifunctional mechanical metamaterials based on triply periodic minimal surface lattices. *Adv. Eng. Mater.* 2019;21(10):1900524. https://doi.org/10.1002/adem.201900524
- Schoen A.H. Reflections concerning triply-periodic minimal surfaces. *Interface Focus*. 2012;2(5):658–668. https://doi.org/10.1098/rsfs.2012.0023
- Abueidda D.W., Bakir M., Al-Rub R.K.A., Bergström J.S., Sobh N.A., Jasiuk I. Mechanical properties of 3D printed polymeric cellular materials with triply periodic minimal surface architectures. *Materials & Design*. 2017;122(9):255–267. https://doi.org/10.1016/j.matdes.2017.03.018
- 12. Kartashov E.M. Mathematical models of heat conduction with two-phase lag. *J. Eng. Phys. Thermophys.* 2016;89(2): 346–356. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1385-9 [Original Russian Text: Kartashov E.M. Mathematical models of heat conduction with two-phase lag. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal.* 2016;89(2):338–349 (in Russ.).]
- Kartashov E.M., Krotov G.S. Analytical solution of single-phase Stefan problem. *Math. Models Comput. Simul.* 2009;1(2):180–188. https://doi.org/10.1134/S2070048209020021
 [Original Russian Text: Kartashov E.M., Krotov G.S. Analytical solution of single-phase Stefan problem. *Matematicheskoe modelirovanie.* 2008;20(3):77–86 (in Russ.).]
- 14. Kartashov E.M. Analytical approaches to the analysis of unsteady heat conduction for partially bounded regions. *High Temp.* 2020;58(3):377–385. https://doi.org/10.1134/S0018151X20030086 [Original Russian Text: Kartashov E.M. Analytical approaches to the analysis of unsteady heat conduction for partially bounded regions. *Teplofizika vysokikh temperatur*. 2020;58(3):402–411 (in Russ.). https://doi.org/10.31857/S0040364420030084]
- 15. Korenchenko A.E., Zhukova A.A. Evaporation of a liquid sessile droplet subjected to forced convection. *Russ. Technol. J.* 2021;9(5):57–66 https://doi.org/10.32362/2500-316X-2021-9-5-57-66
- 16. Glinskiy I.A., Zenchenko N.V., Maltsev P.P. Thermal modelling of terahertz Quantum-cascade laser based on nanoheterostructures GaAs/AlGaAs. *Rossiiskii Tekhnologicheskii Zhurnal*. 2016;4(3):27–36 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2016-4-3-27-36
- 17. Hayashi K., Kishida R., Tsuchiya A., Ishikawa K. Superiority of triply periodic minimal surface gyroid structure to strutbased grid structure in both strength and bone regeneration. *ACS Appl. Mater. Interfaces*. 2023;15(29):34570–34577. https://doi.org/10.1021/acsami.3c06263
- 18. Chouhan G., Bala Murali G. Designs, advancements, and applications of three-dimensional printed gyroid structures: A review. In: *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part E: Journal of Process Mechanical Engineering*. 2024;238(2):965–987. https://doi.org/10.1177/09544089231160030
- 19. Wakao N., Kagei S. Heat and Mass Transfer in Packed Beds. Taylor & Francis; 1982. 364 p.
- 20. Popov A.I. Heat Transfer Solver. V. 1. Mendeley Data. 2024. https://www.doi.org/10.17632/kcn33tr7sb.1
- 21. Bragin D.M., Popov A.I., Eremin A.V. The thermal conductivity properties of porous materials based on TPMS. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2024;231:125863. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125863

Об авторах

Попов Андрей Игоревич, к.т.н., старший преподаватель, кафедра «Промышленная теплоэнергетика», ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244). E-mail: popov.ai@samgtu.ru. Scopus Author ID 57216363622, SPIN-код РИНЦ 5560-6869, https://orcid.org/0000-0001-5014-8167

Еремин Антон Владимирович, д.т.н., доцент, проректор по интеграционным проектам, ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (443100, Россия, Самара, ул. Молодогвардейская, д. 244). E-mail: a.v.eremin@list.ru. Scopus Author ID 56395547000, ResearcherID D-6936-2014, SPIN-код РИНЦ 3892-0775, https://orcid.org/0000-0002-2614-6329

About the Authors

Andrey I. Popov, Cand. Sci. (Eng.), Senior Lecturer, Department of Industrial Heat Power Engineering, Samara State Technical University (244, Molodogvardeyskaya ul., Samara, 443100 Russia). E-mail: popov.ai@samgtu.ru. Scopus Author ID 57216363622, RSCI SPIN-code 5560-6869, https://orcid.org/0000-0001-5014-8167

Anton V. Eremin, Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, Head of Department of Industrial Heat Power Engineering, Samara State Technical University (244, Molodogvardeyskaya ul., Samara, 443100 Russia). E-mail: a.v.eremin@list.ru. Scopus Author ID 56395547000, ResearcherID D-6936-2014, RSCI SPIN-code 3892-0775, https://orcid.org/0000-0002-2614-6329