

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 536.715

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-4-107-122>

EDN FXQFZG



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Моделирование детонационного режима, возбуждаемого турбулизацией процесса горения

Е.В. Радкевич¹, М.Е. Ставровский^{2, @}, О.А. Васильева³,
Н.Н. Яковлев⁴, М.И. Сидоров⁵

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, 119991 Россия

² МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва, 105005 Россия

³ Московский государственный строительный университет, Москва, 129337 Россия

⁴ Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семёнова РАН, Москва, 119991 Россия

⁵ МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: stavrovskiy@bmstu.ru

• Поступила: 12.12.2024 • Доработана: 14.03.2025 • Принята к опубликованию: 30.05.2025

Резюме

Цели. Объектом исследования являются критические процессы с избыточной энергией, к которым относятся процессы горения и взрыва, разрушения материалов, кристаллизации, спекания материалов и др. Предметом исследования являются результаты численного моделирования турбулизации процесса горения (ламинарно-турбулентного перехода) и закономерностей явлений, связанных с ламинарно-турбулентным переходом в критических процессах.

Методы. Использован термодинамический анализ, обозначивший траектории эволюции системы и показавший, что в процессе горения существуют области устойчивости ламинарного горения, а также метастабильные и лабильные области, где ламинарное горение неустойчиво. Применен энергетический подход к решению задач исследования, при котором основное внимание уделяется вопросам изучения перераспределения избыточной энергии и формирования отличительных признаков структуры и параметров объекта и процессов.

Результаты. Представлены результаты численного эксперимента вибрационного режима турбулизации процесса горения, как взаимодействие резонанса Раушенбаха и ламинарно-турбулентного перехода. На многообразии локального равновесия смоделирован резонанс при накачке кинетической энергии, реализующий сброс избыточной энергии. Для пояснения возникающих при этом новых понятий описан резонанс адиабатического гидродинамического процесса и показана возможность избежать резонанс через механизм сброса избыточной энергии турбулизацией ламинарного процесса, что подтверждается результатами натуральных экспериментов.

Выводы. Показано, что в вибрационном горении можно избежать резонанс за счет срыва с многообразия локального равновесия турбулизацией ламинарного процесса (приближения локального равновесия) при накачке кинетической энергии. В процессе горения существуют области устойчивости ламинарного горения, а также метастабильные и лабильные области, где ламинарное горение неустойчиво. Это не означает,

что в области устойчивости не будут наблюдаться признаки турбулентности при ее развитии состоянии и в этих областях диффузия возмущений будет их размывать, тогда как в областях неустойчивости процесс «отрицательной» (кановской) диффузии будет их концентрировать. Сделано предположение, что области неустойчивости гомогенной системы являются источниками возмущений, а области устойчивости – «стоками».

Ключевые слова: ламинарно-турбулентный переход, детонация, горение, энергия, диффузия

Для цитирования: Радкевич Е.В., Ставровский М.Е., Васильева О.А., Яковлев Н.Н., Сидоров М.И. Моделирование детонационного режима, возбуждаемого турбулизацией процесса горения. *Russian Technological Journal*. 2025;13(4):107–122. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-4-107-122>, <https://www.elibrary.ru/FXQFZG>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Simulation of the detonation regime excited by combustion process turbulence

Evgeny V. Radkevich ¹, Mikhail E. Stavrovsky ^{2, @}, Olga A. Vasilyeva ³,
Nikolay N. Yakovlev ⁴, Mikhail I. Sidorov ⁵

¹ *M.V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119991 Russia*

² *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 105005 Russia*

³ *Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, 129337 Russia*

⁴ *N.N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, 119991 Russia*

⁵ *MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia*

@ *Corresponding author, e-mail: stavrovskiy@bmstu.ru*

• Submitted: 12.12.2024 • Revised: 14.03.2025 • Accepted: 30.05.2025

Abstract

Objectives. The work considers critical processes involving excess energy, which include combustion and explosion, destruction of materials, crystallization, sintering of materials, etc. The results of numerical modeling of the turbulence of the combustion process (laminar–turbulent transition) and the patterns of phenomena associated with the laminar–turbulent transition in critical processes are studied.

Methods. Thermodynamic analysis was used to outline the trajectories of a system's evolution and identify areas of laminar combustion stability during combustion, as well as metastable and labile regions where laminar combustion is unstable. An energy analysis approach was used to solve research problems involving the study of the redistribution of excess energy and the formation of distinctive structural features and parameters of the object and processes.

Results. The results of a numerical experiment of the vibrational turbulence regime of the combustion process are presented as an interaction of the Rauschenbach resonance and laminar–turbulent transition. The resonance occurring during kinetic energy pumping, which implements the discharge of excess energy, is modeled on a variety of local equilibrium. In order to explain the new concepts that arise in this case, the resonance of the adiabatic hydrodynamic process is described. The possibility of avoiding resonance through the mechanism of dumping excess energy by turbulence of the laminar process is confirmed by the results of field experiments.

Conclusions. The possibility of avoiding resonance in vibrational combustion due to disruption of the local equilibrium from the manifold by turbulence of the laminar process (approximation of local equilibrium) during pumping kinetic energy is demonstrated. During the combustion process, areas of laminar combustion stability are identified, along with metastable and labile areas where laminar combustion is unstable. However, this does not mean that signs of turbulence will not be observed in the stability region in its developed state: in these regions the diffusion of perturbations will blur them, whereas in the instability regions the process of negative (Cahn) diffusion will result in their concentration. It can be assumed that the instability regions of a homogeneous system are sources of perturbations, while the stability regions are sinks.

Keywords: laminar-turbulent transition, detonation, combustion, energy, diffusion

For citation: Radkevich E.V., Stavrovsky M.E., Vasilyeva O.A., Yakovlev N.N., Sidorov M.I. Simulation of the detonation regime excited by combustion process turbulence. *Russian Technological Journal*. 2025;13(4):107–122. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-4-107-122>, <https://www.elibrary.ru/FXQFZG>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В формулировках Кана и Хилларда теории неравновесных фазовых переходов [1, 2] и в теории критической опалесценции Дебая [3] при описании критических явлений детали химии опущены, а логика оперирует только понятием энергии. Все критические процессы – процессы с избыточной энергией. Деграция ламинарного процесса через процесс турбулизации приводит к сбросу энергии [4–8]. Гипотеза, которой придерживаются авторы – «турбулизация является одним из механизмов зарождения устойчивой зоны детонации» [4]. Экспериментально эта гипотеза подтверждена А.Н. Шиплюком¹ и др. [9–11] применением регулируемой неоднородности на обтекаемой поверхности. Интересует место и момент срыва с многообразия локального равновесия при сбрасывании избытка энергии через турбулизацию процесса.

Будем оперировать понятием энергии в нескольких формах:

- химическая энергия будет представлена в виде концентраций;
- неравновесная часть свободной энергии у Кана – градиент концентрации;
- механическая составляющая в «градиентной» форме напряжений (структура как пружина), дающая когерентную спиноподобную [11];
- по аналогии может быть добавлена кинетическая энергия вихрей (как квазичастиц – жидких частиц механики сплошной среды).

Энергетический метод решения ряда задач в большинстве случаев отличается наглядностью

¹ Шиплюк А.Н. *Развитие возмущений и управление пограничными слоями при гиперзвуковых скоростях*: дис. ... д. ф.-м. н. Новосибирск, 2005. 320 с. [Shplyuk A.N. *Growth of perturbations and control of boundary layers at hypersonic speeds*. Dr. Sci. Thesis (Phys.-Math.). Novosibirsk, 2005. 320 p. (in Russ.)]

и простотой. Механизмы обратной связи необходимы для того, чтобы наметить наиболее простые практические методы воздействия на колебательную систему и для того, чтобы дать ее полное теоретическое описание. Хорошо известным, но недостаточно изученным переходным процессом является смена режимов с ламинарного на турбулентный.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТУРБУЛИЗАЦИИ ВИБРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ

Предложено решение следующих задач:

- вывод модели ламинарного горения в поле силы тяжести с энергетическим учетом гидродинамики;
- энергия завихренности, мера деграции ламинарного горения, энтропия и свободная энергия процесса турбулизации ламинарного горения;
- знакопеременная диффузия, аналог оператора Кана – Хилларда в уравнении для внутренней энергии (замыкания срыва с многообразия ламинарного процесса горения);
- численный эксперимент вибрационного режима турбулизации процесса горения, как взаимодействие резонанса Раушенбаха [5] и ламинарно-турбулентного перехода.

МЕХАНИЗМ ТУРБУЛИЗАЦИИ ВИБРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ

На многообразии локального равновесия (в рамках ламинарного процесса приближения локального равновесия) в [6–8] смоделирован вибрационный взрыв (резонанс при накачке кинетической энергии), реализующий сброс избыточной энергии. Для пояснения возникающих при этом новых понятий в [8] описан резонанс адиабатического гидродинамического процесса и показана возможность избежать резонанс через механизм сброса избыточной энергии

турбулизацией ламинарного процесса [12], что подтверждается реальным экспериментом.

При вибрационном горении, в терминах И.Г. Баренблата, возникает превращенное состояние, в котором механизмом сброса избыточной энергии является либо резонанс, либо турбулизация процесса. В случае одной активной компоненты глобальную неоднородность системы можно характеризовать как неоднородное распределение энтальпии по потоку (смеси). При накачке кинетической энергии, в процессе горения в поле силы тяжести в фазовом пространстве переменных (объем V , давление P , температура T , приведенное количество активной компоненты n , энтропия S , внутренняя энергия E , скорость активной компоненты u_1 , скорость пассивной компоненты u_2) приращение энтальпии есть полный дифференциал на многообразии локального равновесия [5], на котором ламинарный процесс (в приближении локального равновесия) описывается уравнениями (1)–(4) классической двухкомпонентной модели процесса горения в поле силы тяжести:

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho U) = \varepsilon_R \Delta \rho, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t ((1 - c_0 n) \rho u_2) + \partial_x ((1 - c_0 n) \rho u_2^2) + \partial_x P = \\ = \varepsilon_R \Delta u_2 + \varepsilon_g (1 - c_0 n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t (c_0 n \rho u_1) + \partial_x (c_0 n \rho u_1^2) + \partial_x P = \\ = \varepsilon_R \Delta u_1 + \varepsilon_g c_0 n \rho, \end{aligned}$$

$$\rho \frac{d}{dt} E + P \operatorname{div} U = \varepsilon_R \Delta E,$$

где ρ – плотность; x – пространственная переменная; t – время; c_0 – концентрация активной компоненты; ε_g – ускорение свободного падения; $\varepsilon_R = 1/\operatorname{Re}$, Re – число Рейнольдса, $\varepsilon_R = \varepsilon / (\rho_* U_* L_*)$, где ρ_* – характерная плотность однородной смеси; U_* – характерная скорость однородной смеси; L_* – характерный размер среды; ε – кинетическая вязкость; средняя скорость смеси – $U = c_0 n u_1 + (1 - c_0 n) u_2$, $\frac{d}{dt} = \partial_t + U \partial_x$ и кинетические уравнения [13, 14]:

$$\rho c \frac{d}{dt} T = \partial_x (\lambda \partial_x T) + QW(n, T), \quad (2)$$

где c – молярная концентрация, Q – теплота;

$$\rho \frac{d}{dt} n = \partial_x (\rho D \partial_x N N n) - W(n, T),$$

где D – коэффициент подвижности, NNn – приведенное количество активной компоненты двухкомпонентной смеси.

$$W = k_0 \rho n^\beta e^{-\frac{E_*}{RT}}, \quad (3)$$

где k_0 – константа скорости реакции при температуре, β – порядок реакции, R – универсальная газовая постоянная, E_* – энергия активации.

Замыкающие уравнения в этом случае – уравнения состояния:

$$\begin{aligned} P = (\gamma - 1) \rho E + \frac{P_{\text{ad}}^0}{\rho_0} \rho - \rho g(x, e_1) + \\ + TS \rho + n \mu + R n T \rho, \end{aligned} \quad (4)$$

где γ – показатель адиабаты, P_{ad}^0 – начальное давление по адиабате, ρ_0 – плотность, g – гравитационная постоянная, $e_1 = 1, 0, 0$, μ – химический потенциал;

$$S + nS + n \left(\frac{d\mu_0(T)}{dT} + R \ln \left(\frac{n T \rho^2}{n_0 T_0 \rho_0^2} \right) \right) = 0, \quad (5)$$

где μ_0 – химический потенциал на входе, T_0 – температура, n_0 – приведенное количество активной компоненты.

Основная гипотеза – механизм ламинарно-турбулентного перехода в процессе горения при накачке кинетической энергии является диффузионное расслоение, которое реализуется в одномерном случае полосчатой структурой перемежения слоев с большими (турбулизированные слои) и малыми градиентами (ламинарные слои) переменных. Увеличение энтропии системы при переходе от ламинарного состояния к турбулентному представим в форме энтропии смешения удельных объемов (слоев идеальной смеси), имеющих разные значения гидродинамической составляющей энтальпии, работы против силы тяжести, энергетической составляющей процесса горения и составляющей, обусловленной сжимаемостью.

ТУРБУЛИЗАЦИЯ ВИБРАЦИОННОГО ГОРЕНИЯ. НАКАЧКА

Для вибрационного горения за меру деградации процесса ламинарно-турбулентным переходом естественно взять отношение плотности энергии завихренности H_M к плотности кинетической энергии (меры деградации ламинарного процесса горения):

$$h = \frac{\rho H_M}{\frac{1}{2} \rho U^2},$$

где индекс M означает многообразие локального равновесия. При этом учитываем энергетическое влияние

гравитации на ламинарно-турбулентный переход в процессе горения. Для конструирования фазового перехода 2-го рода прежде всего необходимо построить аналог потенциала Ландау – Гинзбурга (удельную свободную энергию Гиббса). Исследуем возможность распространения теории неравновесных фазовых переходов в форме теории спиновального распада Кана – Хилларда на ламинарно-турбулентный переход процесса горения при накачке кинетической энергии. Условие срыва с многообразия локального равновесия формулируется в терминах меры деградации ламинарного процесса горения. Перейдем к новым переменным. По аналогии с лазерной терминологией Хакена [15] введем накачку:

$$\xi = \frac{(\gamma - 1)\rho E}{\rho \tilde{U}^2}, \quad (6)$$

где \tilde{U} – внутренняя энергия.

Переменную ламинарно-турбулентного перехода, обозначим как

$$h = \frac{H_M}{\rho U^2} = \xi + \nu,$$

где число вибрационной турбулизации:

$$\nu = \frac{-\rho_0 E_0 - \rho^3 g(x, e_1) + \frac{P_{ad}^0}{\rho_0} (\rho - \rho_0)}{\rho \tilde{U}^2} + \frac{\left[-T \frac{d\mu_0(T)}{dT} + \mu_0(T) - RT \right] n\rho}{\rho \tilde{U}^2},$$

где E_0 – начальная внутренняя энергия.

Энергия завихренности:

$$\begin{aligned} H_M &= (\gamma - 1)(\rho E - \rho_0 E_0) - \rho g(x, e_1) + \\ &+ \frac{P_{ad}^0}{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \left[-T \frac{d\mu_0(T)}{dT} + \mu_0(T) - RT \right] n\rho = \\ &= P_{ad,g} - P_{comb} + \left[-T \frac{d\mu_0(T)}{dT} + \mu_0(T) \right] n\rho - \\ &- (\gamma - 1)\rho_0 E_0 - P_{ad}^0, \end{aligned}$$

где $P_{ad,g} = (\gamma - 1)\rho E + \frac{P_{ad}^0}{\rho_0} \rho - \rho^3 \epsilon_g(x, e_1)$ – давление адиабатического гидродинамического процесса в поле тяжести; $P_{comb} = RTn\rho$ – уравнение Менделеева – Клайперона.

Начальное парциальное давление $P_{ad}^0 = \text{const}$, а также $\rho_0 = \text{const}$, и начальная внутренняя энергия $E_0 = \text{const}$.

Как показано ниже, условие возбуждения турбулентности имеет вид $\nu \ll 1$. Следует заметить, что при $\nu \rightarrow 0$, чем больше U^2 , тем более развитой является турбулентность (ν – аналог числа Рейнольдса).

Условие зарождения ламинарно-турбулентного перехода при вибрационном горении (обратная связь) – достаточная малость числа вибрационной турбулизации ($\nu \rightarrow 0$), если $U^2 \rightarrow \infty$. Последнее справедливо, если

$$\frac{Tn}{U^2} \rightarrow 0, \quad (7)$$

что проверяем численным экспериментом.

ПОТЕНЦИАЛ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ $\tilde{F}(\xi, \nu)$

Ламинарно-турбулентный переход при вибрационном горении наступает при увеличении скорости пассивной компоненты на входе. Этому соответствуют фазовые переходы в системах ограниченно растворимых жидкостей с нижней критической точкой расслоения (в таких системах расслоение наступает при повышении температуры, что соответствует повышению энтальпии; в гидродинамических системах – увеличению гидродинамической составляющей полной энтальпии). Из эксперимента известно, что смесь турбулизированных и ламинарных слоев (губки в терминологии Ландау) можно считать совершенной смесью, для которой энтропия процесса ламинарно-турбулентного перехода равна:

$$s = (h) = -(h^2 \ln(h^2) + (1 - h^2) \ln(1 - h^2)), \quad (8)$$

$$h = \xi + \nu, \nu \rightarrow 0, \text{ если } |U| \rightarrow \infty. \quad (9)$$

Распределение h представляет избыточную энтальпию неоднородной термодинамической системы по отношению к однородной. Назовем h^2 и s – безразмерными энтальпией и энтропией процесса ламинарно-турбулентного перехода соответственно. Безразмерную свободную энергию Гиббса G процесса ламинарно-турбулентного перехода зададим в форме

$$F(\xi; \alpha, \nu_{comb}) = h_{comb}^2 - \alpha(\nu_{comb}) h_{comb}^2 s(h_{comb}^2), \quad (10)$$

представляющей собой аналог уравнения Гиббса – Гельмгольца $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$, где роль интенсивной переменной T (температуры) играет параметр $\alpha(\nu_{comb}) h_{comb}^2$, отражающий связь между температурой и энтальпией H , обусловленную энергоемкостью среды (аналог теплоемкости); α – параметр на расчетном интервале; ν_{comb} – число турбулизации при накачке тепла; h_{comb} – расчетная

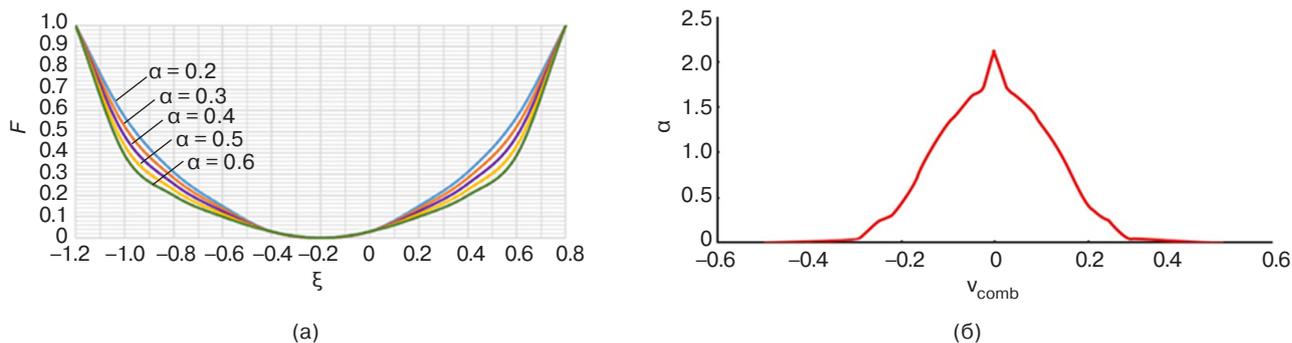


Рис. 1. (а) Графики потенциала $F(\xi; \alpha; v_{\text{comb}})$ при $v = 0.2$ и разных значениях $\alpha = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$, (б) зависимость $\alpha(v_{\text{comb}})$

энтальпия. Здесь функция $\alpha(v_{\text{comb}})$ определяется графиком, показанным на рис. 1б. На рис. 1а приведены графики потенциала $F(\xi; \alpha; v_{\text{comb}})$ при $v = 0.2$ и разных значениях α .

Проведем по [13] коррекцию потенциала $F(\xi; \alpha; v_{\text{comb}})$:

1) для $-1 < v_{\text{comb}} \leq 0$, $-1 + |v| < \xi < 1 + |v|$ положим:

$$\tilde{F}(\xi, v_{\text{comb}}) = \begin{cases} F(\xi, v_{\text{comb}}), & 0 \leq \xi < 1 + |v_{\text{comb}}|, \\ \gamma_{-}(h^2(\xi) - h^2(0) + F(0, v_{\text{comb}})), & \xi < 0. \end{cases} \quad (11)$$

Константу γ_{-} находим из условия

$$2\gamma_{-}v = \frac{d}{d\xi} F(0, v) = 2v(1 + 2\alpha v^2 \ln(v^2) + \alpha(1 - 2\alpha v^2) \ln(1 - v^2))$$

или

$$\gamma_{-} = (1 + 2\alpha v^2 \ln(v^2) + \alpha(1 - 2v^2) \ln(1 - v^2)).$$

2) для $0 < v < 0.5$, $-1 - v < \xi < 1 - v$

$$\tilde{F}(\xi, v_{\text{comb}}) = \begin{cases} F(\xi, v_{\text{comb}}), & -v_{\text{comb}} \leq \xi < 1 - v_{\text{comb}}, \\ \gamma_{+}g_1(\xi), & \xi < 1 - v. \end{cases}$$

Константу γ_{+} находим из условия

$$\gamma_{+}g_1''(-v_{\text{comb}}) = F''(-v_{\text{comb}}, -v_{\text{comb}}).$$

Здесь

$$g_1(\xi, v) = h^2(1 + \alpha(1 - h^2)^6 \ln(1 - h^2)).$$

Графики потенциала ламинарно-турбулентного перехода показаны на рис. 2а и 2б.

УРАВНЕНИЕ СРЫВА С МНОГООБРАЗИЯ ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ (НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ПРОЦЕССА ПРИБЛИЖЕНИЯ ЛОКАЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ)

Будет показано, что накачка кинетической энергией приводит к избыточной энергии ламинарного процесса приближения локального равновесия и вызывает его неустойчивость. Последнее выражается либо резонансом, либо срывом с многообразия локального равновесия, которое имеет характер турбулизации процесса. Через турбулизацию процесса «сбрасывается» избыток энергии, порожденный накачкой кинетической энергией. Опишем математическую модель турбулизации процесса.

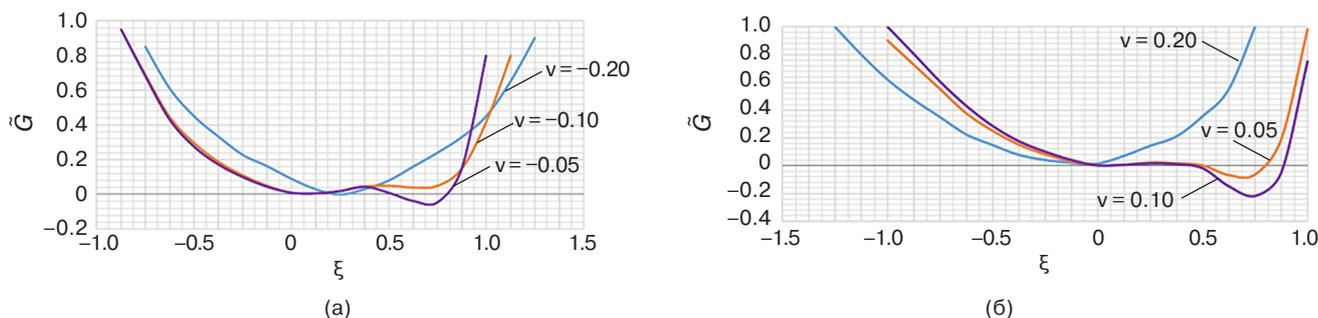


Рис. 2. Графики потенциала $\tilde{F}(\xi; v)$ для значений v : (а) $-0.20, -0.10, -0.05$, (б) $0.05, 0.10, 0.20$

Для моделирования срыва с многообразия локального равновесия, деградации ламинарного процесса горения при нагреве смеси в фазовом пространстве безразмерных переменных $(\tilde{E}, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{n})$ надо перейти к новым переменным $(\xi, \tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{\rho}, \tilde{T}, \tilde{n})$, а именно, перейти к накачке ξ , как переменной ламинарно-турбулентного перехода. Уравнения

$$\rho \frac{d}{dt} \tilde{E} + \tilde{P} \operatorname{div} \tilde{U} = 0; (\gamma - 1) \tilde{E} = \xi \tilde{U}^2 \quad (12)$$

позволяют получить для накачки:

$$\tilde{\rho} \tilde{U}^2 \frac{d}{dt} \tilde{E} + 2 \tilde{\rho} \tilde{U} \xi \frac{d}{dt} \tilde{U} = \tilde{\rho} \frac{d}{dt} (\tilde{U}^2 \xi) = -(\gamma - 1) \tilde{P} \operatorname{div} \tilde{U},$$

где \tilde{P} – давление, $d\tilde{t}$ – дифференциал по температуре.

Отсюда: $\tilde{\rho} \frac{d}{dt} \xi + \frac{2 \tilde{\rho} \xi}{\tilde{U}} \frac{d}{dt} \tilde{U} + \frac{(\gamma - 1) \tilde{P}}{\tilde{U}^2} \operatorname{div} \tilde{U} = 0.$
Здесь

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{U} &= \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d}{dt} (\tilde{\rho} \tilde{U}) - \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{U} \frac{d}{dt} \tilde{\rho} = \\ &= \frac{1}{\tilde{\rho}} [-\partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) - \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} + \tilde{\varepsilon}_g (1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} - \\ &- \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) - \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} + \tilde{\varepsilon}_g c_0 \tilde{n} \tilde{\rho}] + \frac{1}{\tilde{\rho}} \tilde{U} \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}). \end{aligned}$$

Окончательно:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{d}{dt} \xi - \frac{2 \xi}{\tilde{U}} [\partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) + \\ + \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) + 2 \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} - \tilde{\varepsilon}_g \tilde{\rho}] + \\ + 2 \xi \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}) + \frac{(\gamma - 1) \tilde{P}}{\tilde{U}^2} \operatorname{div} \tilde{U} = 0. \end{aligned}$$

Теперь регуляризуем вязкостью уравнения для импульсов и уравнение неразрывности (гидродинамики) вязкостью:

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}) = \tilde{\varepsilon}_R \tilde{\Delta} \tilde{\rho}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2) + \partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} = \\ = \tilde{\varepsilon}_g (1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} + \tilde{\varepsilon}_R \tilde{\Delta} \tilde{u}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1) + \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} = \\ = \tilde{\varepsilon}_g c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} + \tilde{\varepsilon}_R \tilde{\Delta} \tilde{u}_1, \end{aligned}$$

где $\tilde{U} = c_0 \tilde{n} \tilde{U}_1 + (1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{U}_2$ – средняя скорость смеси, $\operatorname{Re} = 1 / \tilde{\varepsilon}_R$, $\operatorname{Re} = \eta_D / (U_* L_*) = \eta_D / (\rho_* U_* L_*)$ –

число Рейнольдса однородного состояния $\rho_*, n_*, T_*, u_1^*, u_2^*$, η_D – динамическая вязкость в числе Рейнольдса, $U_* = c_* n_* u_1^* + (1 - c_* n_*) U_*$ – характерная скорость однородной смеси, L_* – характерный размер среды, $\tilde{\varepsilon}_R$ – динамическая вязкость.

От уравнения для внутренней энергии перейдем к уравнению для накачки, в котором введем знакопеременную диффузию Кана (оператор Кана переменной диффузии):

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{d}{dt} \xi - \frac{2 \xi}{\tilde{U}} [\partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) + \\ + \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) + 2 \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} + \tilde{\varepsilon}_g \tilde{\rho}] + 2 \xi \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}) + \\ + \frac{(\gamma - 1) \tilde{P}}{\tilde{U}^2} \operatorname{div} \tilde{U} = \partial_{\tilde{x}} \left(\frac{\tilde{D}}{\tilde{T}} \partial_{\tilde{x}} (F(\xi, \nu) - \tilde{\varepsilon}_K^2 \partial_{\tilde{x}}^2 \xi) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

где ε_K – знакопеременная диффузия Кана, $\tilde{D} = D / (\rho_* U_* L_* T_*)$, D – коэффициент подвижности, а потенциал F в этом случае

$$F(\xi, \nu) = \partial_{\xi} \tilde{G}(\xi, \nu).$$

Добавим уравнения кинетики для температуры и приведенного количества вещества \tilde{n} . Окончательно получаем модель турбулизации вибрационного горения в переменных гидродинамики, кинетики и накачки:

$$\partial_{\tilde{t}} \tilde{\rho} + \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}) = \tilde{\varepsilon}_R \tilde{\Delta} \tilde{\rho}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2) + \partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} = \\ = \tilde{\varepsilon}_g (1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} + \tilde{\varepsilon}_R \tilde{\Delta} \tilde{u}_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{t}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1) + \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) + \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} = \\ = \tilde{\varepsilon}_g c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} + \tilde{\varepsilon}_R \tilde{\Delta} \tilde{u}_1, \end{aligned}$$

$$\tilde{\rho} \tilde{c} \frac{d}{dt} \tilde{T} = \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\lambda} \partial_{\tilde{x}} \tilde{T}) + \tilde{T} \tilde{S} \tilde{W}(\tilde{n}, \tilde{T}), \quad (16)$$

$$\tilde{\rho} \frac{d}{dt} \tilde{n} = \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{D} \partial_{\tilde{x}} \tilde{n}) - \tilde{W}(\tilde{n}, \tilde{T}),$$

$$\tilde{W} = \tilde{k}_0 \tilde{\rho} \tilde{n}^{\beta} e^{-\frac{\tilde{E}_*}{RT}}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \frac{d}{dt} \xi - \frac{2 \xi}{\tilde{U}} [\partial_{\tilde{x}} ((1 - c_0 \tilde{n}) \tilde{\rho} \tilde{u}_2^2) + \\ + \partial_{\tilde{x}} (c_0 \tilde{n} \tilde{\rho} \tilde{u}_1^2) + 2 \partial_{\tilde{x}} \tilde{P} + \tilde{\varepsilon}_g \tilde{\rho}] + 2 \xi \partial_{\tilde{x}} (\tilde{\rho} \tilde{U}) + \\ + \frac{(\gamma - 1) \tilde{P}}{\tilde{U}^2} \operatorname{div} \tilde{U} = \partial_{\tilde{x}} \left(\frac{\tilde{D}}{\tilde{T}} \partial_{\tilde{x}} [\tilde{F}(\xi, \nu) - \tilde{\varepsilon}_K^2 \partial_{\tilde{x}}^2 \xi] \right), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{P} = \tilde{P}_{ad,g} + \tilde{P}_{comb} + \left(-\tilde{T} \frac{d\tilde{\mu}_0(\tilde{T})}{d\tilde{T}} + \tilde{\mu}_0(\tilde{T}) \right) \tilde{n}\tilde{p}, \quad (19)$$

$$\tilde{S} = - \left(\frac{d}{d\tilde{T}} \tilde{\mu}_0(\tilde{T}) + \ln \left(\frac{\tilde{\rho}^2 \tilde{T} \tilde{n}}{\tilde{\rho}_0^2 \tilde{T}_0 \tilde{n}_0} \right) \right) \tilde{n}.$$

ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ МОДЕЛИ (15)–(19)

Для установления возможности турбулизации процесса горения проведем численные эксперименты модели (15)–(19) на отрезке $\tilde{x} \in [0, 1]$ с крайними условиями управления скоростью накачки кинетической энергии:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_2|_{\tilde{x}=0} &= \tilde{u}_2^0(1 + V\tilde{t}) \partial_{\tilde{x}} \tilde{p}|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{p}|_{\tilde{x}=1} = \\ &= \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_1|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_1|_{\tilde{x}=1} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{T}|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{T}|_{\tilde{x}=1} = 0, \\ \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_2|_{\tilde{x}=1} &= \partial_{\tilde{x}} \tilde{n}|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \tilde{n}|_{\tilde{x}=1} = 0, \\ \partial_{\tilde{x}} \xi|_{\tilde{x}=0} &= \partial_{\tilde{x}} \xi|_{\tilde{x}=1} = \partial_{\tilde{x}} \mu|_{\tilde{x}=0} = \partial_{\tilde{x}} \mu|_{\tilde{x}=1}, \end{aligned}$$

(где $\mu = \hat{F}_{comb}(\xi, v) - \hat{\varepsilon}_K^2 \partial_{\tilde{x}}^2 \xi$, \hat{F}_{comb} – свободная энергия, полученная в результате расчета) и начальными условиями, моделирующими в одномерном случае впрыскивание из форсунки горючей компоненты двухкомпонентной смеси:

$$\begin{aligned} \tilde{p}|_{\tilde{t}=0} &= \tilde{p}_0 = 1, \quad \tilde{u}_1|_{\tilde{t}=0} = \tilde{u}_1^0 = 0.2, \\ \tilde{u}_2|_{\tilde{t}=0} &= \tilde{u}_2^0 = 0.2, \quad \tilde{T}|_{\tilde{t}=0} = \tilde{T}_0 = 10, \end{aligned}$$

$\tilde{E}_* = 100$. Начальные данные для накачки $\xi_0 = \text{const}$ из зоны лабильности потенциала $\hat{F}_{comb}(\xi, v_v)$ (индекс v – турбулизация по скорости):

$$\tilde{\varepsilon}_K = 0.04, \quad \tilde{\varepsilon}_g = 0.01.$$

Пример 1 (рис. 3а–3з). Снятие резонанса турбулизацией (далеко от резонанса), для $j = 1$ в формуле для стандартного химического потенциала:

$$\tilde{\mu}_0(\tilde{T}) = \tilde{T}_0 \left[B_* - (R + A_*) \frac{\tilde{T}^j}{\tilde{T}_0^j} \right], \quad (20)$$

где $\tilde{\mu}_0(\tilde{T})$ – химический потенциал; \tilde{T}_0 – начальная температура; \tilde{T}, B_*, A_* – постоянные; R – универсальная газовая постоянная.

Базовые параметры турбулизации вибрационного горения: $u_1(0) = u_2(0) = 10$, $\xi(0) = 0.2$, $\rho(0) = 1$, сечения на всех представленных ниже графиках $t = 0.005, 0.010, 0.025, 0.035, 0.050, 0.065, 0.125$; $T(0) = 10$.

Как видно на рис. 3а, б, давление растет, энтропия падает, т.е. дефлаграция переходит в детонацию при подключении турбулизации. Растут температура и плотность.

Пример 2 (рис. 4а–4к). Снятие резонанса турбулизацией (для критических значений $A_* + R = 3$), для $j = 4$ в (20). Рассматриваем счет для базовых параметров турбулизации вибрационного горения: $u_1(0) = u_2(0) = 10$, $\xi(0) = 0.2$, $\rho(0) = 1.5$. Для всех графиков ниже сечения $t = 0, 0.005, 0.010, 0.025, 0.035, 0.050, 0.065, 0.125$. Первый вариант (базовый): $T(0) = 5$. Существенно растут давление и энтропия. Имеется обширная зона детонационного режима вибрационного горения (без турбулизации была узкая зона детонационного горения вблизи резонанса [3]). Растет внутренняя энергия, но относительно накачиваемой кинетической энергии она уменьшается ($\xi \rightarrow 0$). Часть накачиваемой кинетической энергии переходит в теплоту.

Пример 3 (рис. 5а–5к). Снятие резонанса для $j = 4$ (20) (вдали от критических параметров резонанса), при низких температурах, при базовых параметрах турбулизации $u_1(0) = u_2(0) = 12$; $\xi(0) = 0.2$, $\rho(0) = 1.5$; сечения $\tilde{t} = 0, 0.005, 0.010, 0.025, 0.035, 0.050, 0.065, 0.125$. Здесь $T(0) = 0.8$. Давление и энтропия падают. Растет внутренняя энергия, но относительно накачиваемой кинетической энергии она уменьшается ($\xi \rightarrow 0$). Часть кинетической энергии уходит в теплоту (растут \tilde{T} и $\tilde{T}\tilde{S}$).

Пример 4 (рис. 6а–6к). Снятие резонанса турбулизацией (вблизи критических параметров резонанса) для $j = 4$ в (20), при низких температурах, $u_1(0) = u_2(0) = 8$, $\xi(0) = 0.2$, $\rho(0) = 1.5$, сечения $\tilde{t} = 0, 0.005, 0.010, 0.025, 0.035, 0.050, 0.065, 0.125$; $T(0) = 0.8$.

Энтропия падает, а давление растет (так же, как и до турбулизации, но значительно шире зона детонации). Растет внутренняя энергия, но относительно накачиваемой кинетической энергии она уменьшается ($\xi \rightarrow 0$). Часть накачиваемой кинетической энергии переходит в теплоту (растут внутренняя энергия \tilde{E} и \tilde{T}).

Пример 5 (рис. 7а–7к). Перемешивание. Численный эксперимент (20) для $j = 4$, $A_* + R = 0.5$ (базовые параметры), $\tilde{p}|_{\tilde{t}=0} = \tilde{p}_0 = 1$, $\tilde{u}_1|_{\tilde{t}=0} = \tilde{u}_1^0 = 0.2$; $\tilde{u}_2|_{\tilde{t}=0} = \tilde{u}_2^0 = 0.2$; $\tilde{T}|_{\tilde{t}=0} = \tilde{T}_0 = 10$ – константы; $\tilde{n}|_{\tilde{t}=0} = \tilde{n}_1 = 0.5$, $\tilde{x} \in (0; 0.3) \cup (0.4; 0.5)$, $\tilde{n}|_{\tilde{t}=0} = 0.66$, $\tilde{x} \in (0.3; 0.4)$; $E_* = 100$; $\tilde{t} = 0, 0.005, 0.010, 0.025, 0.035, 0.050, 0.065, 0.125$. начальные данные для внутренней энергии $\tilde{E}_0 = \text{const}$, $\tilde{T}_0 = 8$, $\tilde{u}_2 = 8$.

Снятие резонанса для перемешивания. С начальными условиями, моделирующими в одномерном случае впрыскивание из трех форсунок горючей компоненты двухкомпонентной смеси.

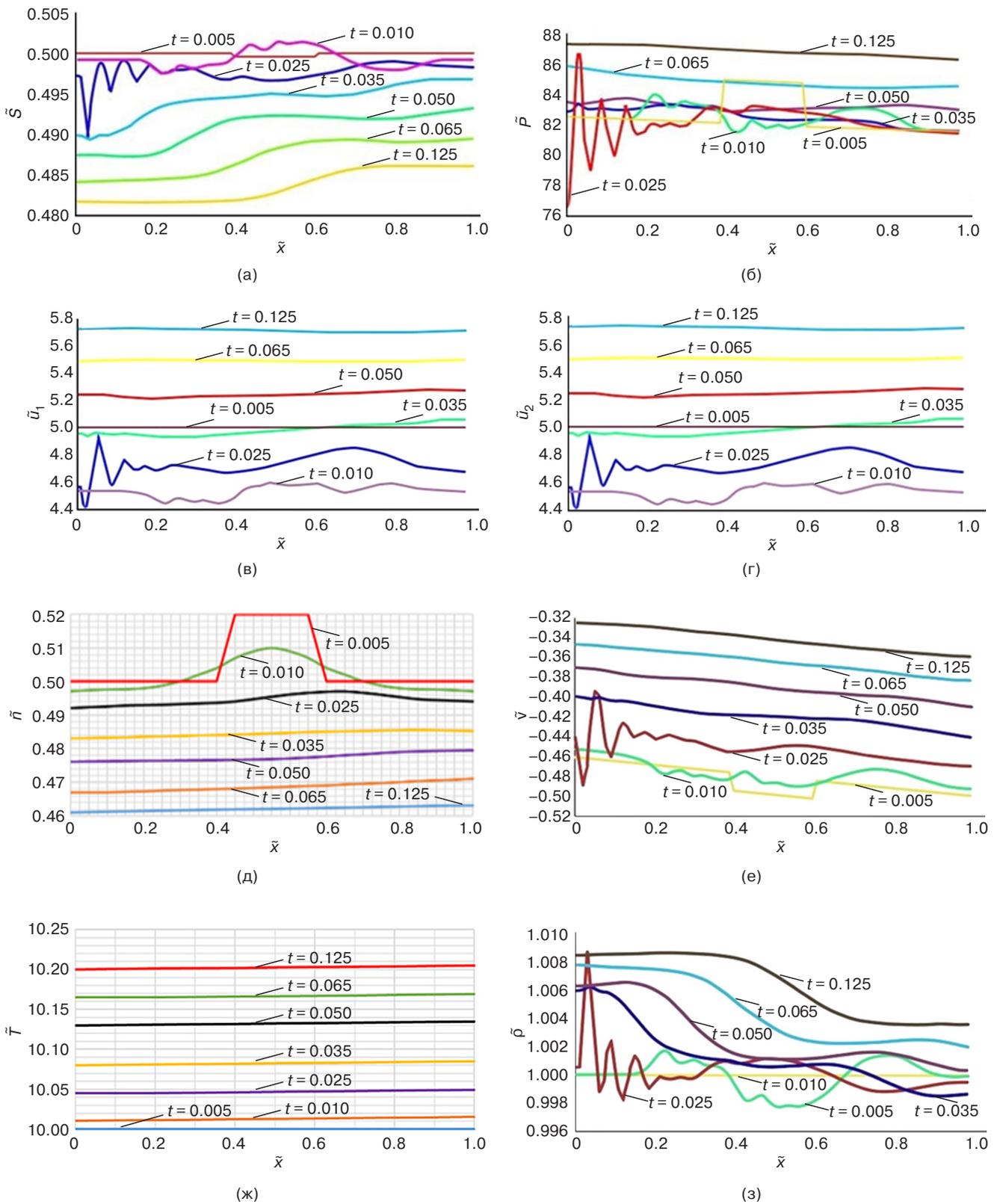


Рис. 3. Результаты численного эксперимента модели (15)–(19) на отрезке $\tilde{x} \in [0,1]$ для разных значений t : (а) \tilde{S} , (б) \tilde{P} , (в) \tilde{u}_1 , (г) \tilde{u}_2 , (д) приведенное количество вещества \tilde{n} , (е) \tilde{v} , (ж) \tilde{T} , (з) $\tilde{\rho}$

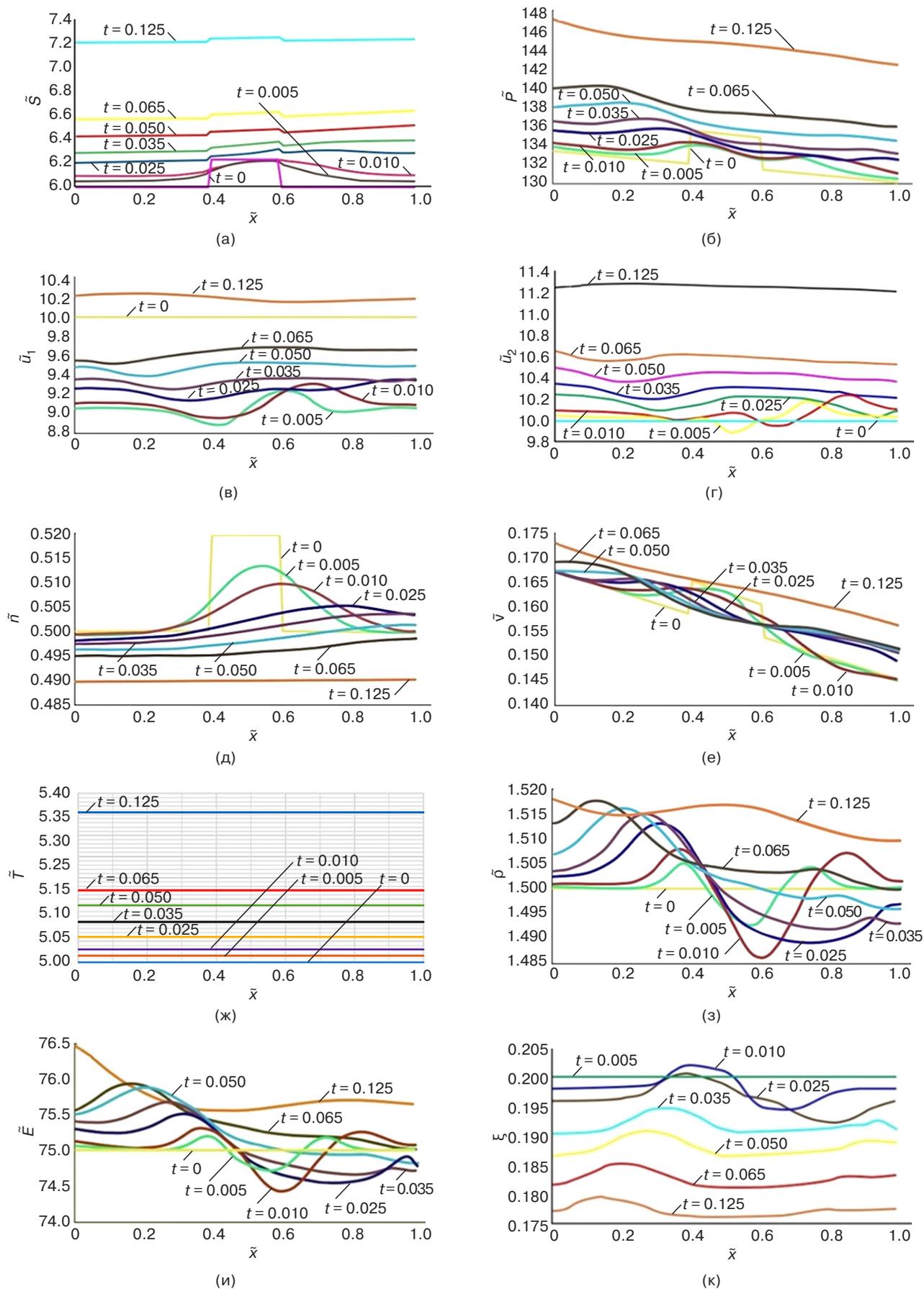


Рис. 4. Результаты расчетов для базовых параметров турбулизации вибрационного горения для разных значений t : (а) \bar{S} ; (б) \bar{P} ; (в) \tilde{u}_1 ; (г) \tilde{u}_2 ; (д) \tilde{n} ; (е) \tilde{v} ; (ж) \tilde{T} ; (з) $\tilde{\rho}$; (и) \tilde{E} ; (к) $\tilde{\xi}$

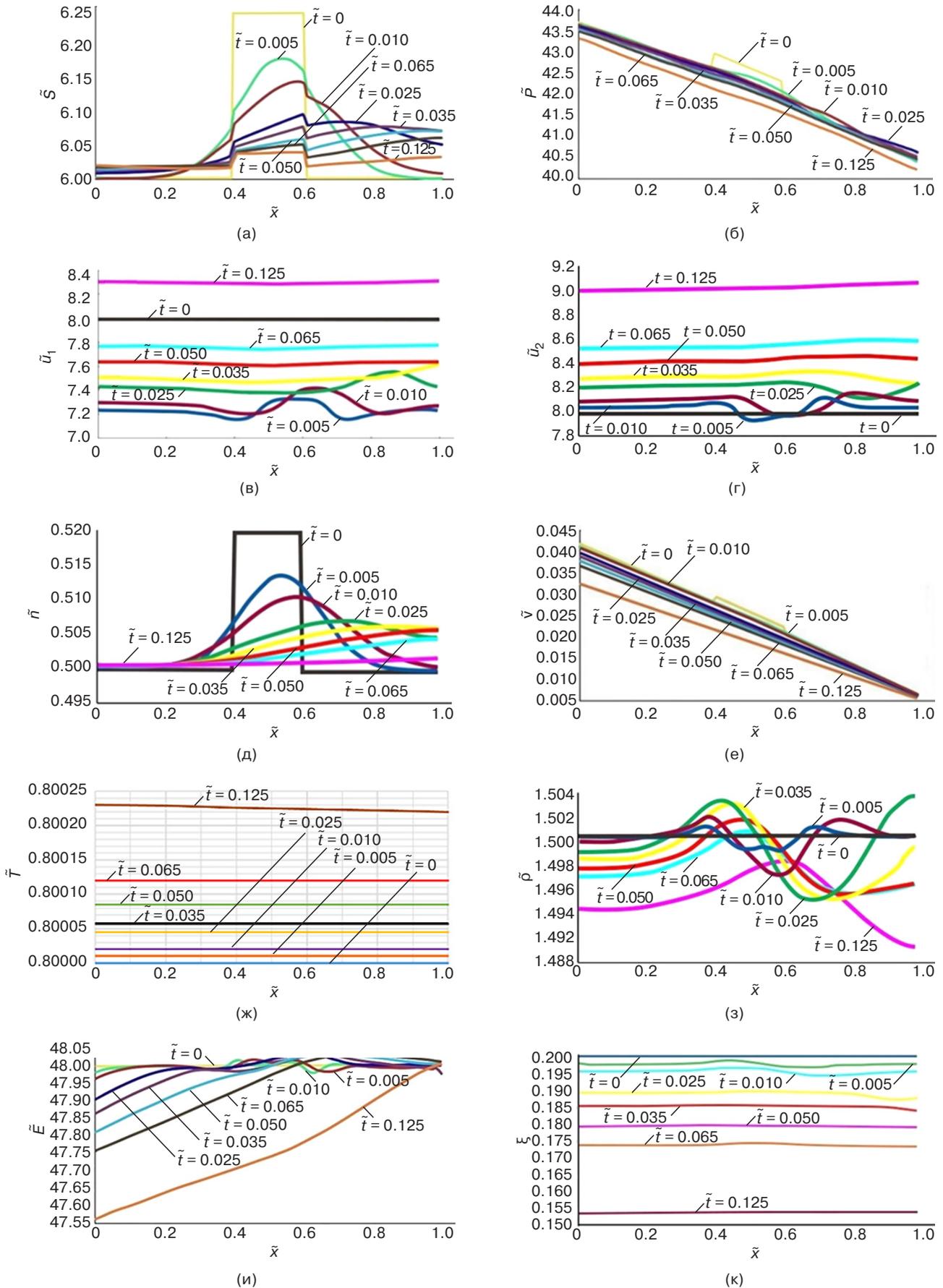


Рис. 5. Результаты расчета по снятию резонанса для $j = 4$ (20) (вдали от критических параметров резонанса) при низких температурах для разных значений \tilde{t} : (а) S , (б) P , (в) \tilde{u}_1 , (г) \tilde{u}_2 , (д) \tilde{n} , (е) \tilde{v} , (ж) \tilde{T} , (з) $\tilde{\rho}$, (и) \tilde{E} , (к) $\tilde{\xi}$

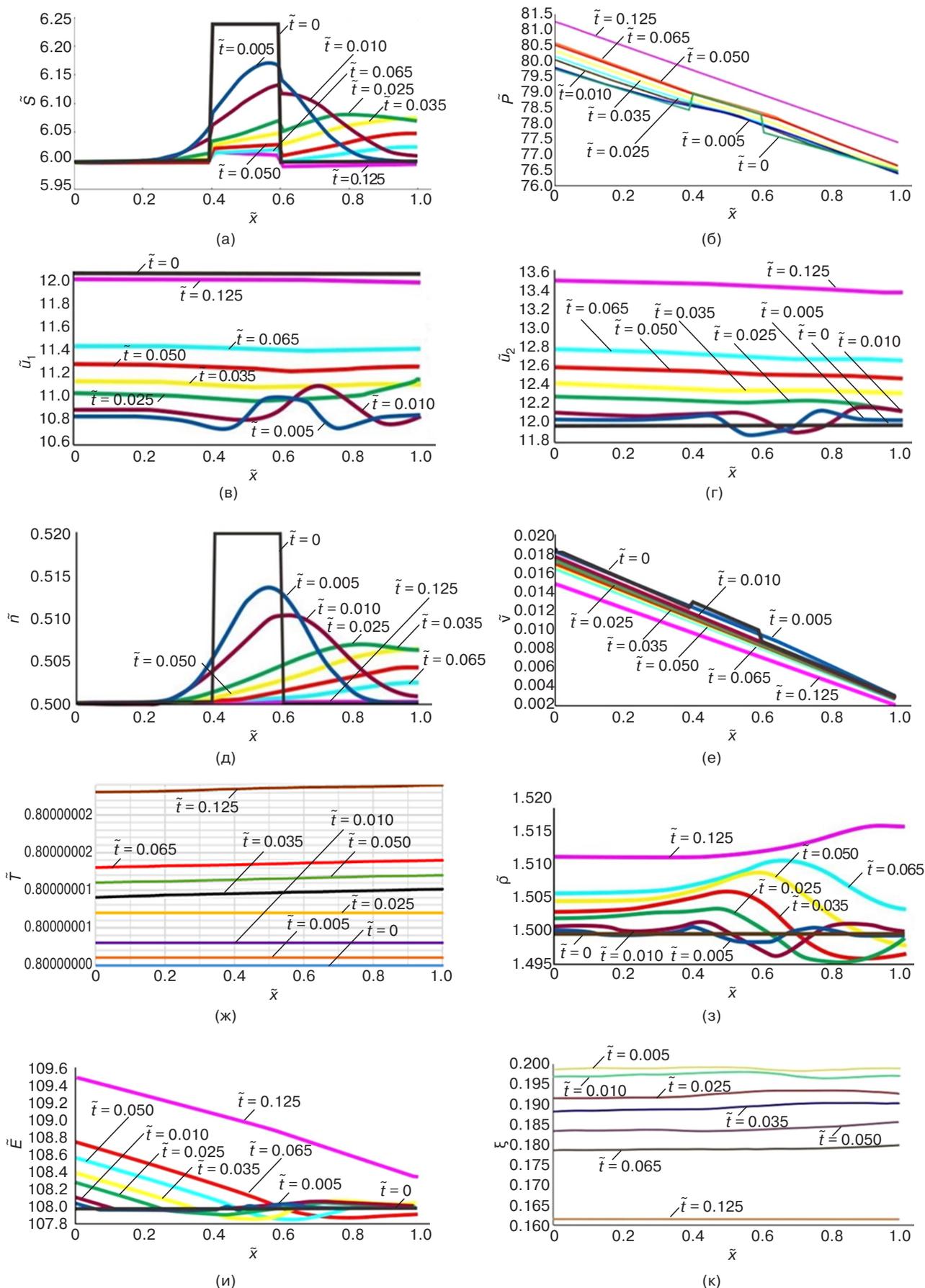


Рис. 6. Результаты расчета снятия резонанса турбулизацией (вблизи критических параметров резонанса) для $j = 4$ в (20) при низких температурах для разных значений \tilde{t} : (а) \tilde{S} , (б) \tilde{P} , (в) \tilde{u}_1 , (г) \tilde{u}_2 , (д) \tilde{n} , (е) \tilde{v} , (ж) \tilde{T} , (з) $\tilde{\rho}$, (и) \tilde{E} , (к) $\tilde{\xi}$

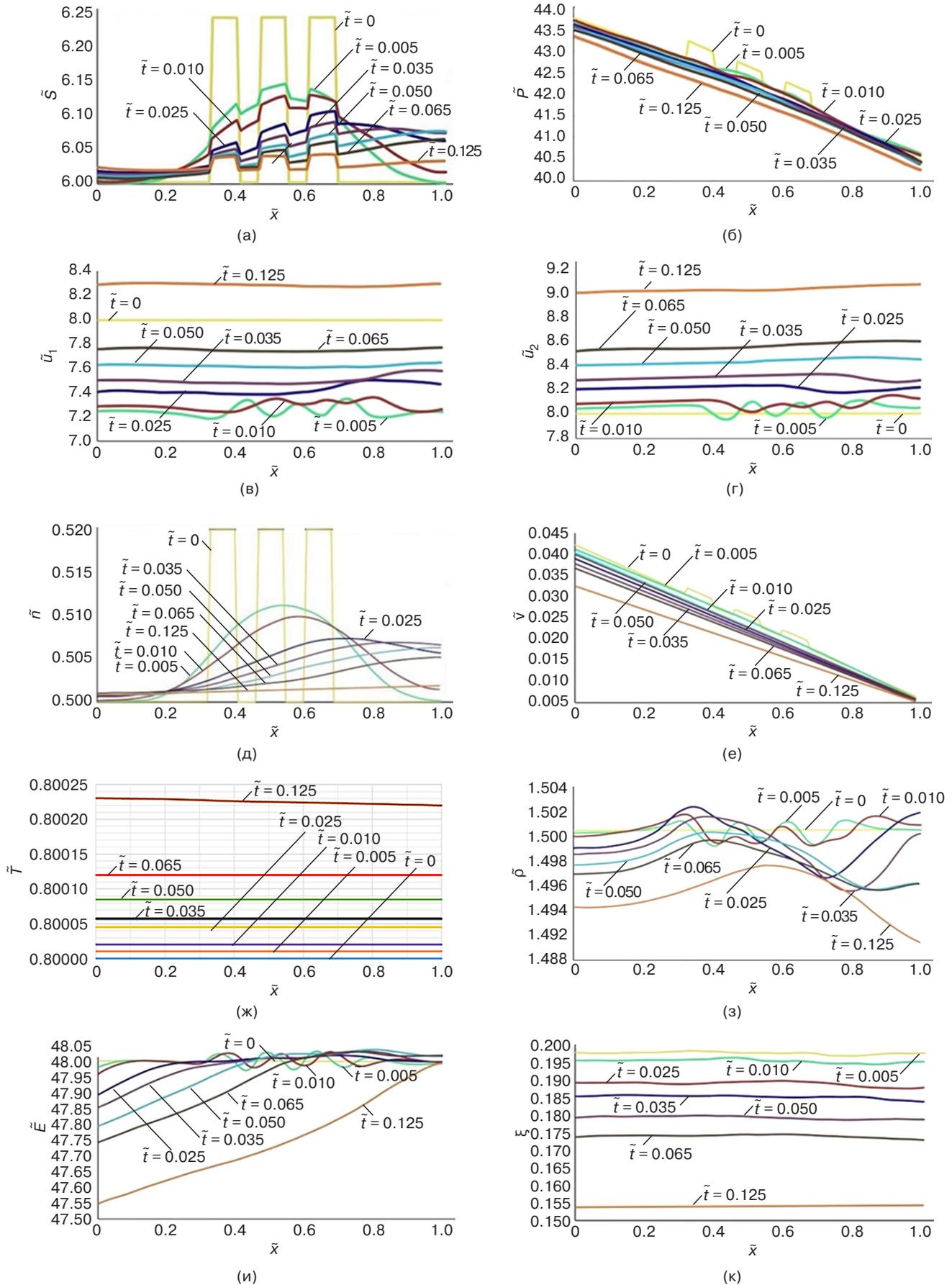


Рис. 7. Результаты численного эксперимента (20) для $j = 4$, $A_* + R = 0.5$ для разных значений \tilde{t} : (а) \tilde{S} , (б) \tilde{P} , (в) \tilde{u}_1 , (г) \tilde{u}_2 , (д) \tilde{n} , (е) \tilde{v} , (ж) \tilde{T} , (з) $\tilde{\rho}$, (и) \tilde{E} , (к) $\tilde{\xi}$

Энтропия и давление падают (так же, как и до турбулизации). С увеличением скорости \tilde{u}^2 нейтральной компоненты на входе появляется режим детонационного горения. В этом численном эксперименте также возникает режим детонационного горения. Растут температура, плотность и внутренняя энергия. На характере графиков отражено влияние силы тяжести. Аналогичные результаты численного эксперимента получены для снятия резонанса турбулизацией $j = 4$ в (20) при перемешивании, с увеличением начальной скорости пассивной переменной $\tilde{u}_2^0 = 10$. С увеличением скорости нейтральной компоненты \tilde{u}_2 на входе при перемешивании появляется режим детонационного горения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные исследования позволяют утверждать, что термодинамический метод обеспечивает принципиальные возможности исследования эволюции системы (в данном случае стремление к расщеплению на «турбулентное» и «не турбулентное» горение). Следует отметить, что использованный термодинамический анализ может только обозначить тенденции развития процесса (принципиальную возможность реализации), выбор траектории эволюции системы, но не скорость этого процесса. В тоже время этот анализ позволяет заключить, что в процессе горения существуют области устойчивости ламинарного горения, а также метастабильные и лабильные области, где ламинарное горение неустойчиво. Это не означает, что в области устойчивости не будут наблюдаться признаки турбулентности при ее развитом состоянии. Просто в этих областях диффузия возмущений будет их размывать, тогда как в областях неустойчивости процесс «отрицательной» (кановской) диффузии будет их концентрировать. Можно предположить, что области неустойчивости гомогенной системы являются источниками возмущений, а области устойчивости – стоками. Все эти предположения проверены путем численного

эксперимента с использованием математической модели, приведенной выше. Математическая модель ламинарно-турбулентного перехода в процессе горения, как аналога неравновесного фазового перехода, может усложняться, начиная с исходной термодинамической модели.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование проведено в рамках работы по Соглашению о предоставлении из федерального бюджета гранта на проведение крупных научных проектов по приоритетным направлениям научно-технологического развития № 075-15-2024-527 от 23 апреля 2024 г.

ACKNOWLEDGMENTS

The study was carried out within the framework of the Agreement on Federal Support for Major Scientific Projects in Priority Areas of Scientific and Technological Development No. 075-15-2024-527 dated April 23, 2024.

Вклад авторов

Е.В. Радкевич – разработка и математическая интерпретация модели горения.

М.Е. Ставровский – описание моделей критических явлений.

О.А. Васильева – численный эксперимент моделей.

Н.Н. Яковлев – натурный эксперимент, получение данных для моделей.

М.И. Сидоров – проверка адекватности моделей и описания процессов.

Authors' contributions

E.V. Radkevich – development and mathematical interpretation of the combustion model.

M.E. Stavrovsky – description of models of critical phenomena.

O.A. Vasilyeva – numerical experiment of models.

N.N. Yakovlev – full-scale experiment, obtaining data for models.

M.I. Sidorov – verification of the adequacy of models and description of processes.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cahn J.W., Hillard J.E. Free energy of a nonuniform system. 1. Interfacial free energy *J. Chem. Phys.* 1958;28(2):258–271. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>
2. Cahn J.W. Spinodal decomposition. *Acta Metall.* 1961;9(9):795–811. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(61\)90182-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(61)90182-1)
3. Дебай П. *Избранные труды*. Л.: Наука; 1987. 559 с.
4. Радкевич Е.В., Лукашев Е.А., Яковлев Н.Н., Васильева О.А., Сидоров М.И. *Введение в обобщенную теорию неравновесных фазовых переходов и термодинамический анализ задач механики сплошной среды*. М.: Изд-во МГУ; 2019. 342 с.
5. Раушенбах Б.В. *Вибрационное горение*. М.: Физматгиз; 1961. 500 с.
6. Радкевич Е.В., Васильева О.А., Сидоров М.И., Ставровский М.Е. О резонансе Раушенбаха. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика, Механика*. 2021;3:54–65.

7. Радкевич Е.В., Яковлев Н.Н., Васильева О.А. Вопросы математического моделирования вибрационного горения. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*. 2020;495:69–73. <https://doi.org/10.31857/S2686954320060144>
8. Radkevich E.V., Yakovlev N.N., Vasil'eva O.A. Questions and problems of mathematical modeling qua nonequilibrium of combustion processes. *Eurasian J. Math. Computer Appl.* 2020;8(4):31–68. <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-4-31-68>
9. Шиплюк А.Н., Бунтин Д.А., Маслов А.А., Чокани Н. Нелинейные механизмы начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода при гиперзвуковых скоростях. *Прикладная механика и техническая физика*. 2003;44(5):64–71.
10. Лукашевич С.В., Морозов С.О., Шиплюк А.Н. Исследование стабилизации высокоскоростного пограничного слоя с помощью пористых покрытий (обзор). *Прикладная механика и техническая физика*. 2023;64(4):27–45. <https://doi.org/10.15372/PMTF202215169>
11. Morozov S.O., Lukashevich S.V., Shipluk A.N. Hypersonic Boundary Layer Instability and Control by Passive Porous Coatings. In book: Sherwin S., Schmid P., Wu X. (Eds.). *IUTAM Laminar-Turbulent Transition. IUTAM Bookseries*. Springer; 2023. V. 38. P. 613–619. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67902-6_53
12. Радкевич Е.В., Васильева О.А., Яковлев Н.Н., Сидоров М.И., Ставровский М.Е. *Математическое моделирование детонационного горения*. М.: Типография «Эко-Пресс»; 2024. 200 с.
13. Зельдович Я.Б., Баренблат Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.М. *Математическая теория горения и взрыва*. М.: Наука; 1980. 472 с.
14. Скрипов В.П., Скрипов А.В. Спинодальный распад (фазовый переход с учетом неустойчивых состояний). *Успехи физических наук*. 1979;128(2):193–231. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0128.197906a.0193>
15. Хакен Дж. *Синергетика*: пер. с англ. М.: Мир; 1980. 405 с.

REFERENCES

1. Cahn J.W., Hillard J.E. Free energy of a nonuniform system. 1. Interfacial free energy *J. Chem. Phys.* 1958;28(2):258–271. <https://doi.org/10.1063/1.1744102>
2. Cahn J.W. Spinodal decomposition. *Acta Metall.* 1961;9(9):795–811. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(61\)90182-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(61)90182-1)
3. Debye P. *Izbrannye trudy (Collected Papers)*. Leningrad: Nauka; 1987. 559 p. (in Russ.).
4. Radkevich E.V., Lukashev E.A., Yakovlev N.N., Vasil'eva O.A., Sidorov M.I. *Vvedenie v obobshchennuyu teoriyu neravnesnykh fazovykh perekhodov i termodinamicheskii analiz zadach mekhaniki sploshnoi sredy (Introduction to the Generalized Theory of Nonequilibrium Phase Transitions and Thermodynamic Analysis of Continuum Mechanics Problems)*. Moscow: Moscow University Press; 2019. 342 p. (in Russ.).
5. Raushenbakh B.V. *Vibratsionnoe gorenje (Vibrational Combustion)*. Moscow: Fizmatgiz; 1961. 500 p. (in Russ.).
6. Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Sidorov M.I., et al. On the Raushenbakh Resonance. *Moscow Univ. Mech. Bull.* 2021;76(3):65–77. <https://doi.org/10.3103/S0027133021030055>
[Original Russian Text: Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Sidorov M.I., Stavrovskii M.E. On the Raushenbakh Resonance. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 1: Matematika, Mekhanika*. 2021;3:54–65 (in Russ.).]
7. Radkevich E.V., Yakovlev N.N., Vasil'eva O.A. Mathematical Modeling of Vibrational-Combustion. *Dokl. Math.* 2020;102(3):505–509. <https://doi.org/10.1134/S1064562420060162>
[Original Russian Text: Radkevich E.V., Yakovlev N.N., Vasil'eva O.A. Mathematical Modeling of Vibrational-Combustion. *Doklady Rossiiskoi Akademii Nauk. Matematika, Informatika, Protssesy Upravleniya*. 2020;495:69–73 (in Russ.). <https://doi.org/10.31857/S2686954320060144>]
8. Radkevich E.V., Yakovlev N.N., Vasil'eva O.A. Questions and problems of mathematical modeling qua nonequilibrium of combustion processes. *Eurasian J. Math. Computer Appl.* 2020;8(4):31–68. <https://doi.org/10.32523/2306-6172-2020-8-4-31-68>
9. Shipluk A.N., Buntin D.A., Maslov A.A., et al. Nonlinear Mechanisms of the Initial Stage of the Laminar–Turbulent Transition at Hypersonic Velocities. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2003;44(5):654–659. <https://doi.org/10.1023/A:1025500219183>
[Original Russian Text: Shipluk A.N., Buntin D.A., Maslov A.A., Chokani N. Nonlinear Mechanisms of the Initial Stage of the Laminar–Turbulent Transition at Hypersonic Velocities. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*. 2003;44(5):64–71 (in Russ.).]
10. Lukashevich S.V., Morozov S.O., Shipluk A.N. Investigations of high-speed boundary layer stabilization by using porous coatings (review). *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2023;64(4):575–590. <https://doi.org/10.1134/S002189442304003X>
[Original Russian Text: Lukashevich S.V., Morozov S.O., Shipluk A.N. Investigations of high-speed boundary layer stabilization by using porous coatings (review). *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*. 2023;64(4):27–45. <https://doi.org/10.15372/PMTF202215169>]
11. Morozov S.O., Lukashevich S.V., Shipluk A.N. Hypersonic Boundary Layer Instability and Control by Passive Porous Coatings. In: Sherwin S., Schmid P., Wu X. (Eds.). *IUTAM Laminar-Turbulent Transition. IUTAM Bookseries*. Springer; 2023. V. 38. P. 613–619. https://doi.org/10.1007/978-3-030-67902-6_53
12. Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Yakovlev N.N., Sidorov M.I., Stavrovskii M.E. *Matematicheskoe modelirovanie detonatsionnogo goreniya (Mathematical Modeling of Detonation Combustion)*. Moscow: Eco-Press; 2024. 200 p. (in Russ.).
13. Zel'dovich Ya.B., Barenblat G.I., Librovich V.B., Makhviladze G.M. *Matematicheskaya teoriya goreniya i vzryva (Mathematical Theory of Combustion and Explosion)*. М.: Наука; 1980. 472 p. (in Russ.).

14. Skripov V.P., Skripov A.V. Spinodal decomposition (phase transition via unstable states). *Phys. Usp.* 1979;22(6):389–410. <https://doi.org/10.1070/PU1979v022n06ABEH005571>
[Original Russian Text: Skripov V.P., Skripov A.V. Spinodal decomposition (phase transition via unstable states). *Uspekhi fizicheskikh nauk.* 1979;128(2):193–231 (in Russ.). <https://doi.org/10.3367/UFNr.0128.197906a.0193>]
15. Haken H. *Sinergetika (Synergetics)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1980. 405 p. (in Russ.).
[Haken H. *Synergetics*. Springer; 1978. 355 p.]

Об авторах

Радкевич Евгений Владимирович, д.ф.-м.н., профессор, кафедра дифференциальных уравнений, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (119991, Россия, Москва, Ленинские Горы, д. 1). E-mail: evrad07@gmail.com. Scopus Author ID 6603609635, <https://orcid.org/0000-0001-7904-4476>

Ставровский Михаил Евгеньевич, д.т.н., профессор, кафедра промышленной логистики, ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана) (105005, Россия, Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5). E-mail: stavrov@list.ru. Scopus Author ID 56766192700, ResearcherID H-6399-2017, SPIN-код РИНЦ 6166-2296, <https://orcid.org/0000-0001-7144-2461>

Васильева Ольга Александровна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра прикладной математики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (НИУ МГСУ) (129337, Россия, Москва, Ярославское шоссе, д. 26). E-mail: vasiljeva.ovas@ya.ru. Scopus Author ID 56966381200, SPIN-код РИНЦ 2411-9316, <https://orcid.org/0000-0001-6426-2067>

Яковлев Николай Николаевич, к.т.н., научный консультант, лаборатория детонации, ФГБун «Федеральный исследовательский центр химической физики им. Н.Н. Семенова Российской академии наук» (ФИЦ ХФ РАН) (119991, Россия, Москва, ул. Косыгина, д. 4). E-mail: amntksoyuz@mail.ru. Scopus Author ID 7004647760, SPIN-код РИНЦ 2067-7668, <https://orcid.org/0009-0002-8058-3586>

Сидоров Михаил Игоревич, д.т.н., заместитель начальника отдела, Инжиниринговый центр мобильных решений, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: m.sidorov60@mail.ru. Scopus Author ID 57194154324, ResearcherID U-5720-2019, SPIN-код РИНЦ 6774-8834, <https://orcid.org/0009-0005-5607-7589>

About the Authors

Evgeny V. Radkevich, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Differential Equations, Lomonosov Moscow State University (1, Leninskie Gory, Moscow, 119991 Russia). E-mail: evrad07@gmail.com. Scopus Author ID 6603609635, <https://orcid.org/0000-0001-7904-4476>

Mikhail E. Stavrovsky, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Industrial Logistics, Bauman Moscow State Technical University (5, 2-ya Baumanskaya ul., Moscow, 105005 Russia). E-mail: stavrov@list.ru. Scopus Author ID 56766192700, ResearcherID H-6399-2017, RSCI SPIN-code 6166-2296, <https://orcid.org/0000-0001-7144-2461>

Olga A. Vasilyeva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (26, Yaroslavl'skoe sh., Moscow, 129337 Russia). E-mail: vasiljeva.ovas@ya.ru. Scopus Author ID 56966381200, RSCI SPIN-code 2411-9316, <https://orcid.org/0000-0001-6426-2067>

Nikolay N. Yakovlev, Cand. Sci. (Eng.), Scientific Consultant, Detonation Laboratory, N.N. Semenov Federal Research Center for Chemical Physics of the Russian Academy of Sciences (4, Kosygina ul., Moscow, 119991 Russia). E-mail: amntksoyuz@mail.ru. Scopus Author ID 7004647760, RSCI SPIN-code 2067-7668, <https://orcid.org/0009-0002-8058-3586>

Mikhail I. Sidorov, Dr. Sci. (Eng.), Deputy Head of the Department, MIREA – Russian Technological University (78, Vernad'skogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: m.sidorov60@mail.ru. Scopus Author ID 57194154324, ResearcherID U-5720-2019, RSCI SPIN-code 6774-8834, <https://orcid.org/0009-0005-5607-7589>