

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 004.02

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-4-78-94>

EDN CVZOXD



ОБЗОРНАЯ СТАТЬЯ

Современные методы оптимизации и особенности их применения

С.М. Бекетов[@],
Д.А. Зубкова,
А.М. Гинцяк,
Ж.В. Бурлуцкая,
С.Г. Редько

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251 Россия
[@] Автор для переписки, e-mail: salbek.beketov@spbpu.com

• Поступила: 29.10.2024 • Доработана: 13.01.2025 • Принята к опубликованию: 13.05.2025

Резюме

Цели. Цель статьи – провести аналитический обзор методов и инструментов оптимизации, используемых в моделировании, для выявления их ключевых особенностей, эффективности и областей возможного применения. Исследование направлено на формирование целостной картины современных подходов, что позволит специалистам выбирать наиболее удобные методы для решения разнообразных задач. Ключевая задача – составить систематизированное представление об инструментах оптимизации, охватывающее различные методики и подходы, которые обеспечат как теоретическую, так и практическую ценность для разработки более эффективных моделей.

Методы. Для достижения поставленных целей исследование основывалось на обширной выборке научных публикаций и аналитических материалов, отобранных из специализированных баз данных и технической документации.

Результаты. Проведены анализ и классификация существующих методов оптимизации, что позволило выявить их сильные и слабые стороны, особенности применения, а также определить взаимосвязь между теоретическими концепциями и их практической реализацией. В ходе анализа рассмотрены различные подходы к оптимизации, охватывающие как классические, так и современные методы, что обеспечило всесторонний обзор применимых подходов в моделировании.

Выводы. Проведенное исследование подтверждает важность грамотного подбора методов оптимизации, что способствует более эффективному и точному моделированию. Полученные результаты подчеркивают необходимость дальнейшего изучения и сравнительного анализа методов на практике с целью более глубокого понимания их эффективности и применимости в различных условиях. Перспективы будущих исследований включают экспериментальное тестирование эффективности различных подходов на базе нескольких моделей, что позволит определить их преимущества и недостатки для более точного выбора метода в зависимости от специфики задач.

Ключевые слова: методы оптимизации, особенности применения, многокритериальные методы оптимизации, оптимизационные алгоритмы, эволюционные алгоритмы, оптимизация цифровых моделей, оптимизационная задача, программные инструменты оптимизации

Для цитирования: Бекетов С.М., Зубкова Д.А., Гинцяк А.М., Бурлуцкая Ж.В., Редько С.Г. Современные методы оптимизации и особенности их применения. *Russian Technological Journal*. 2025;13(4):78–94. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-4-78-94>, <https://www.elibrary.ru/CVZOXD>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REVIEW ARTICLE

Modern optimization methods and their application features

Salbek M. Beketov[@],
Daria A. Zubkova,
Aleksei M. Gintciak,
Zhanna V. Burlutskaya,
Sergey G. Redko

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, St. Petersburg, 195251 Russia

[@] *Corresponding author, e-mail: salbek.beketov@spbpu.com*

• Submitted: 29.10.2024 • Revised: 13.01.2025 • Accepted: 13.05.2025

Abstract

Objectives. The authors conduct an analytical review of available optimization methods and simulation tools to identify their key features, effectiveness, and possible applications. The aim was to form an integrated picture of modern approaches, which may facilitate decision making when selecting the most appropriate method for a particular task. The key objective was to review and classify various optimization tools, which of theoretical and practical value for developers of new models.

Methods. Scientific publications and analytical materials were retrieved from specialized databases and technical documentation libraries.

Results. The analysis and classification of existing optimization methods allowed the authors to identify their advantages, disadvantages, and application features, as well as to determine the relationship between theoretical concepts and their practical implementation. During the analysis, various optimization approaches were considered, covering both classical and modern simulation methods.

Conclusions. The importance of informed selection of optimization methods, which raise the efficiency and accuracy of simulation procedures, is highlighted. The results obtained indicate the need for further study and comparative analysis of the methods used in practice in order to establish their efficiency and applicability in various scenarios. Future research directions include experimental testing of the effectiveness of various approaches based on several models in order to determine their advantages and disadvantages for a more informed selection of the method suitable for a particular task.

Keywords: optimization methods, application features, multi-criteria optimization methods, optimization algorithms, evolutionary algorithms, optimization of digital models, optimization problem, optimization software tools

For citation: Beketov S.M., Zubkova D.A., Gintciak A.M., Burlutskaya Zh.V., Redko S.G. Modern optimization methods and their application features. *Russian Technological Journal*. 2025;13(4):78–94. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-4-78-94>, <https://www.elibrary.ru/CVZOXD>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Оптимизация играет важную роль в моделировании, помогая достигать оптимальных результатов, экономить ресурсы и повышать качество разрабатываемых продуктов и систем. Она становится необходимым элементом современного инженерного процесса, направленного на эффективное решение сложных задач и достижение высоких стандартов в технологическом прогрессе [1]. Однако для обеспечения эффективности и точности оптимизации важно избегать излишних повторений и учитывать разнообразие методов и их сложность в программной реализации. Это особенно важно в таких областях, как проектная деятельность [2], энергетика [3] и система здравоохранения [4], где даже небольшие улучшения могут иметь значительные последствия.

Библиометрический анализ оптимизационных техник подчеркивает эволюцию концепции «оптимизация» от проб и ошибок к более формализованным подходам [5, 6]. Данная эволюция приводит к необходимости систематизированного изложения основных методов приближенного решения задач оптимизации, которые рассматривают их вычислительные аспекты, области применимости и достоинства. Однако выбор метода оптимизации должен соответствовать особенностям моделей. Для этого необходимо учитывать требования к подходящим методам и инструментам, основываясь на понимании сути моделей и особенностей систем для создания более гибких и адаптивных условий для развития [7, 8].

Актуальность исследования методов оптимизации обусловлена рядом факторов, включая растущую сложность социотехнических и социально-экономических систем, развитие вычислительных мощностей и появление новых, более эффективных методов [9, 10].

Целью статьи является проведение аналитического обзора методов оптимизации. Данная цель направлена на классификацию методов оптимизации, а также оценку перспективности применения этих методов в моделях. Рассмотрение большого разнообразия методов оптимизации и дальнейший их анализ упрощает процесс исследования и делает оптимизационные подходы более доступными для широкого круга специалистов.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Анализ литературы позволяет выделить несколько ключевых методов оптимизации, которые широко применяются в различных областях исследования. Рост интереса к проблемам оптимизации моделей вызвал значительный объем исследований в этой области за последние несколько лет, что подчеркивает актуальность и важность разработки эффективных методов оптимизации.

Обзор литературы в рамках данной статьи основан на научно-исследовательских базах данных, Scopus¹, RSCI² и ВАК³. Поиск литературы проводился по следующим ключевым словам: «тип оптимизации», «многокритериальные методы оптимизации», «вычислительная сложность методов оптимизации», «параллельные вычисления», «методы оптимизации», «принятие решений», «оптимизационные алгоритмы», «эволюционные алгоритмы», «статистические методы», «математические методы», «имитационное моделирование», «оптимизация моделей», «оптимизационная задача», «проблемы оптимизации». Общее количество статей по этим запросам за 5 лет составляет 434.

Был выполнен анализ статей, и выбраны наиболее распространенные методы оптимизации в различных областях исследования. Результаты проведенного анализа (доли встречающихся статей относительно общего объема за последние 5 лет) показаны на рис. 1.

Методы оптимизации моделей определяют условия существования объекта или протекания процесса, при которых достигается наилучшее значение какого-либо свойства этого объекта или процесса. Они применяются для эффективного нахождения наилучших решений в различных задачах, где необходимо оптимизировать определенные параметры или критерии [11].

Результаты представляют собой сводный обзор методов оптимизации и их классификацию, позволяя

¹ <https://www.scopus.com/>. Дата обращения 29.10.2024. / Accessed October 29, 2024.

² Russian Science Citation Index – база данных, которая выделяет лучшие российские журналы в РИНЦ и размещает их на платформе Web of Science. [Russian Science Citation Index is a database that distinguishes the best Russian journals and places them on the Web of Science platform.]

³ Высшая аттестационная комиссия при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации. [Higher Attestation Commission under the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.]. <https://vak.minobrnauki.gov.ru/>. Дата обращения 29.10.2024. / Accessed October 29, 2024.

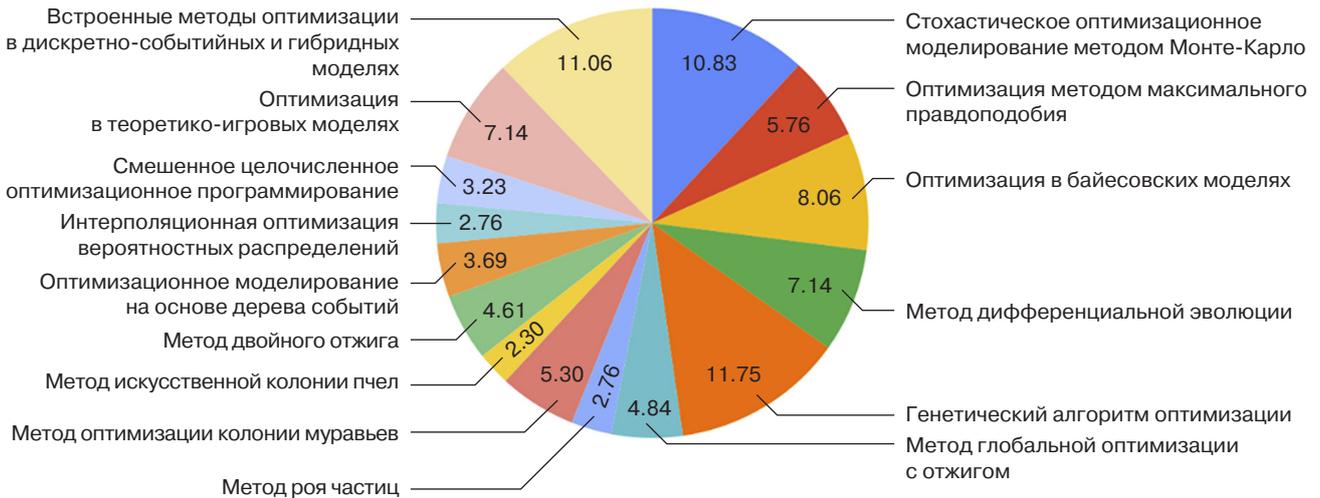


Рис. 1. Доли статей в различных областях исследования за 5 лет

исследователям выбирать конкретный метод оптимизации моделей в зависимости от поставленных задач, типа оптимизации, возможности учета сложных целевых функций, а также достоинств и недостатков методов.

КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Методы оптимизации можно разделить на две категории: методы, основанные на оценке параметров апостериорного распределения, и методы, основанные на неточной и аппроксимационной оценке. Апостериорная оценка – оценка, полученная эмпирическим путем, при выполнении опыта,

эксперимента, а аппроксимационная оценка – это оценка, приближенная к реальным значениям. Внутри последней включены еще две подгруппы – первая основана на эволюционных алгоритмах, а вторая основана на имитационном моделировании. Разработанная авторами классификация методов оптимизации приведена на рис. 2.

Стохастическое оптимизационное моделирование методом Монте-Карло

В стохастическом моделировании часто применяется метод Монте-Карло, особенно в ситуациях, где требуется учет вероятностных параметров. Его широкое применение обусловлено возможностью

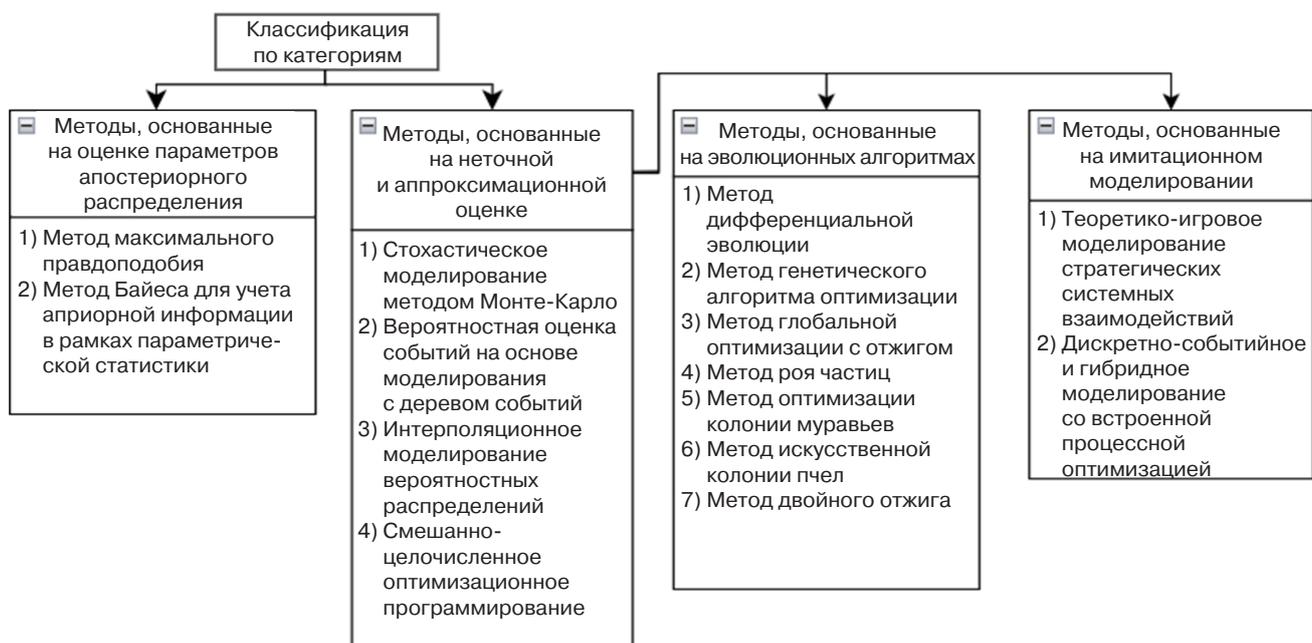


Рис. 2. Классификация методов оптимизации

прогнозирования различных исходов на основе вероятностных факторов.

Процесс стохастического моделирования методом Монте-Карло включает в себя следующие шаги: генерация случайных входных данных, выполнение моделирования, аккумуляция результатов и оценка явлений, которая в общем виде может быть описана формулой:

$$mc = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(i), \quad (1)$$

где mc – оценка явления методом Монте-Карло, N – количество выполненных моделирований, $f(i)$ – результат i -го запуска модели.

В отличие от детерминированных методов, предполагающих строгое следование фиксированным алгоритмам, метод Монте-Карло основан на многократном повторении экспериментов (симуляций) с использованием случайных входных данных. Каждый запуск модели дает один возможный результат, а множество таких результатов позволяет оценить статистическое распределение исходов и, таким образом, более точно прогнозировать вероятностные явления.

Процесс стохастического моделирования методом Монте-Карло включает такие этапы как генерация случайных входных данных, моделирование, аккумуляция результатов (результаты каждого отдельного моделирования сохраняются), оценка явлений, где на основе накопленных данных проводится статистическая обработка, вычисляются средние значения, дисперсии, вероятности наступления событий и другие характеристики.

Применение метода Монте-Карло не ограничивается определенной областью и находит применение в различных задачах прогнозирования. Например, метод Монте-Карло использовался в сочетании с функцией ошибки в виде гауссовой функции для прогнозирования распространения эпидемии COVID-19 в Италии [12]. Авторы провели 150 симуляций методом Монте-Карло, чтобы получить более точный прогноз числа смертных случаев в Китае и Италии.

Метод Монте-Карло также применялся для сравнения производительности методов приоритизации критериев для выбора мест строительства солнечных электростанций в Иране [13]. В исследовании использовались две меры надежности для оценки различных методов приоритизации, и симулятор Монте-Карло оценивал значения надежности в каждом из этих методов, проводя анализ чувствительности.

Оптимизация методом максимального правдоподобия

Метод максимального правдоподобия (Maximum Likelihood Estimation, MLE) представляет собой статистический подход, часто используемый

самостоятельно или в сочетании с другими методами для обработки данных в исследованиях или при решении задач. Метод позволяет оценивать неизвестные параметры, максимизируя функцию правдоподобия, и находит применение для различных целей [14].

Метод MLE ищет такое значение θ , при котором функция правдоподобия максимальна:

$$\theta_{MLE} = \arg \max_{\theta} L(\theta|X), \quad (2)$$

где X – выборка данных; θ – параметрическая модель; $L(\theta|X)$ – функция правдоподобия, которая для данной модели измеряет вероятность получения наблюдаемых данных X при условии значения параметра θ .

Данный алгоритм реализации метода можно представить следующим образом: если предполагается, что данные наблюдений описываются определенной статистической моделью, то MLE позволяет подобрать такие параметры модели, которые делают наблюдаемые данные наиболее вероятными.

Основные шаги применения метода максимального правдоподобия состоят из определения параметрической модели, формулировки функции правдоподобия, максимизации функции правдоподобия.

Метод максимального правдоподобия широко применяется в статистике для оценки параметров в различных моделях, таких как линейные и обобщенные линейные модели, факторный анализ, моделирование структурных уравнений, проверка гипотез, формирование доверительных интервалов и дискретные модели выбора. Он основан на максимизации функции правдоподобия, отражающей вероятность выбора конкретного параметра при известных событиях. Метод MLE нацелен на поиск параметров, при которых результаты модели наиболее соответствуют реальным данным. Оценка правильности параметров производится с использованием информационного критерия Акаике, который сбалансированно оценивает сложность модели и увеличивает достоверность при оптимальном соотношении с максимальным правдоподобием. Наилучшей считается модель с минимальным значением информационного критерия Акаике и максимальным значением правдоподобия. Используется следующая формула для информационного критерия Акаике (Akaike information criterion, AIC):

$$AIC = -2\ln L + 2K, \quad (3)$$

где L – значение функции правдоподобия модели (условная вероятность получить наблюдаемые данные при заданных параметрах модели), K – число параметров модели.

Критерий Акаике можно понять как меру компромисса между точностью и простотой модели.

Если модель слишком сложна (например, содержит большое количество параметров), она может хорошо подстраиваться под данные, но теряет способность обобщать их. Критерий Акаике помогает избежать этой проблемы, добавляя штраф за увеличение количества параметров.

Оптимизация в байесовских моделях

Байесовские модели основаны на теореме Байеса, которая описывает способ обновления вероятностных оценок параметров модели на основе новых данных. Эти модели учитывают априорную информацию о параметрах и корректируют ее с учетом наблюдаемых данных. Теорема Байеса определена формулой:

$$P(\theta | D) = \frac{P(D | \theta)P(\theta)}{P(D)}, \quad (4)$$

где θ – вектор параметров модели; D – набор данных, на котором обучается модель; $P(\theta|D)$ – апостериорная вероятность параметров модели с учетом данных; $P(D|\theta)$ – вероятность данных с учетом параметров модели; $P(\theta)$ – априорная вероятность параметров модели; $P(D)$ – маргинальная вероятность данных.

Применение байесовских моделей начинается с задания априорного распределения, которое отражает начальные предположения о параметрах модели. Данное распределение может быть информативным, если есть данные из предыдущих исследований, или неинформативным, если начальные предположения минимальны. Затем вычисляется правдоподобие, которое показывает, насколько вероятны наблюдаемые данные при различных значениях параметров. На следующем этапе с помощью теоремы Байеса априорное распределение объединяется с правдоподобием для получения апостериорного распределения, которое отражает обновленные знания о параметрах модели после учета данных. Полученное апостериорное распределение интерпретируется для оценки параметров, определения доверительных интервалов и других статистических выводов. Таким образом, байесовские модели представляют собой метод, позволяющий объединять априорные знания и новые данные для более точной оценки параметров [15].

Такие модели применяются в задачах статистического анализа, машинного обучения и других областях, где необходимо учитывать неопределенность и обновлять вероятностные оценки по мере поступления новых данных.

Например, в работе [16] предложена математическая модель обнаружения аномальных наблюдений с использованием анализа чувствительности

нейронной сети. Байесовский подход в данном исследовании позволяет учитывать неопределенность параметров и накапливать знания о поведении данных, что делает метод эффективным для выявления аномалий в сложных многомерных пространствах данных, таких как медицинские системы мониторинга или прогнозирования заболеваний.

В области экономики байесовские модели помогают оценивать влияние налоговых схем на различные социальные группы [17]. Использование теоретических основ плановой экономики в сочетании с байесовскими методами позволяет анализировать вероятностные эффекты изменений в налоговой политике и разрабатывать оптимальные схемы налогообложения, учитывающие неопределенность исходных данных и прогнозов. Байесовские методы используются при разработке и анализе машинных алгоритмов обучения, особенно в задачах оптимизации.

Например, в работе [18] предложена модель машинного обучения для организации работы сотрудников в удаленном и гибридном режимах. Байесовский подход позволяет эффективно оценивать неопределенность в данных, связанных с производительностью сотрудников, и учитывать вероятностное распределение различных факторов, таких как график работы, взаимодействие в команде и особенности рабочих процессов, что делает модель более адаптивной и гибкой.

Интерполяционная оптимизация вероятностных распределений

Интерполяционная оптимизация вероятностных распределений – это метод, который сочетает интерполяцию данных с построением вероятностных распределений для заполнения промежуточных значений между известными дискретными точками. Для этого используются сплайны – гладкие кусочно-полиномиальные функции, которые позволяют аппроксимировать сложные зависимости с высокой степенью точности.

В этом подходе ключевая задача состоит в том, чтобы построить функцию, которая не только проходит через заданные точки вероятностных распределений, но и сохраняет их важные характеристики, такие как математическое ожидание. Для построения сплайнов задается функция вида [19]:

$$S_i = a_i + b_i(x - x_i) + \frac{c_i}{2}(x - x_i)^2 + \frac{d_i}{6}(x - x_i)^3, \quad (5)$$

где a_i, b_i, c_i, d_i – коэффициенты, подлежащие определению на каждом из отрезков; $i = 1, n, x_{i-1} \leq x \leq x_i$.

Метод применяется в тех случаях, когда необходимо предсказать значения вероятностных распределений

в промежуточных точках на основе дискретных данных. Например, в моделях сплайны могут использоваться для интерполяции вероятностных распределений во времени или по значениям параметров.

Особое внимание уделяется сохранению средних характеристик распределения. Для этого используются сплайны, которые обеспечивают совпадение математического ожидания аппроксимированной функции с математическим ожиданием исходного распределения. Такой подход позволяет сохранять статистические свойства данных, что особенно важно в задачах, где требуется корректное представление вероятностных характеристик.

Одним из примеров применения такого подхода является исследование отказов сложных систем при комбинированных нагрузках. В работе [20] описан интерполяционный метод, который позволяет оценивать вероятность отказа системы на основе ограниченного количества данных об испытаниях при различных типах нагрузок. Использование сплайнов для интерполяции вероятностей отказа позволяет восстановить распределения для промежуточных значений параметров нагрузки, сохраняя при этом исходные статистические характеристики.

Другой пример связан с моделированием солнечной радиации, где сплайны с сохранением среднего значения применяются для интерполяции данных о солнечной активности [21]. Автор предложил метод интерполяции, который позволяет корректно восстанавливать распределение солнечной радиации в промежуточных точках временного ряда, обеспечивая совпадение математического ожидания сплайн-функции с исходным усредненным значением.

Смешанно-целочисленное оптимизационное программирование

Смешанно-целочисленное программирование представляет собой следующую оптимизационную задачу [22]:

$$\max \{c^T x : b^1 \leq Ax \leq b^2, d^1 \leq x \leq d^2, x_i \in S\}, \quad (6)$$

где $b^1, b^2, c, d^1, d^2 \in \mathbb{R}^m$; A – действительная $m \times n$ -матрица; x – n -вектор переменных (неизвестных); $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ – множество целочисленных переменных, а x_i – подмножество S , ограниченное целыми числами.

Для решения задач смешанного целочисленного программирования на практике часто используется несколько подходов.

Метод ветвления и привязки [23] основан на разбиении исходной задачи на подзадачи, каждая из которых решается отдельно. Основная идея заключается в построении дерева решений, где на каждом

уровне происходит разбиение пространства поиска, а привязка используется для исключения нерелевантных вариантов на основе решений предыдущих узлов дерева. Данный метод применяется в задачах логистики, где необходимо учитывать как целочисленные, так и непрерывные переменные, например, при оптимизации маршрутов доставки.

Метод разрезания плоскостей [24] направлен на улучшение приближенного решения путем добавления новых ограничений, которые исключают нецелые решения из области допустимых решений. Такие ограничения, называемые «разрезами», позволяют постепенно уточнять область поиска и улучшать качество решения. Метод разрезов часто используется в задачах управления запасами и распределения ресурсов.

Методы декомпозиции [25], такие как обобщенная декомпозиция Бендера, предполагают разбиение сложной задачи на более простые подзадачи. Каждая из подзадач решается отдельно, а затем результаты объединяются для получения решения исходной задачи. Такой подход эффективен для задач большого объема, например, в задачах сетевого планирования или моделирования энергосистем.

Исследование, представленное в работе [26], подробно анализирует эти методы и их применение в задачах линейной и нелинейной оптимизации. Основное внимание уделяется особенностям каждого подхода и их эффективности в зависимости от специфики задачи. Примеры включают как задачи планирования, так и оптимизацию моделей, где необходимо учитывать смешанные ограничения.

Оптимизационное моделирование на основе дерева событий

Деревья решений (Decision Trees) – метод моделирования, классификации и регрессии [27]. Это иерархическая структура, в которой каждый узел представляет собой проверку некоторого признака, каждая ветвь – результат проверки, а листья содержат значения целевой переменной или решение. Деревья решений позволяют строить модели, способные принимать решения на основе анализа множества входных признаков, что делает их полезными в задачах анализа данных и прогнозирования.

Однако для задач, в которых необходимо учитывать временной фактор и вероятности последовательности событий, используются непрерывные деревья событий (Continuous-Time Event Trees, СТЕТ) [28]. Такие структуры являются развитием идеи деревьев решений и позволяют моделировать временные зависимости и вероятностный характер событий. В таких деревьях события описываются статистическими вероятностями или экспоненциально распределенными скоростями событий.

События в дереве событий связаны со статистическими вероятностями или постоянными скоростями, экспоненциально распределенными по Пуассону. Например, отказы компонентов обычно могут происходить при некоторой постоянной частоте отказов λ (постоянная функция опасности). В простейшем случае вероятность отказа зависит от скорости λ и времени воздействия t :

$$P = 1 - e^{-\lambda t}, \quad (7)$$

где $P \approx \lambda t$, если $\lambda t < 0.001$.

Данная формула описывает экспоненциальное распределение событий, характерное для процессов, происходящих случайным образом во времени, таких как отказы оборудования или других систем.

Непрерывные деревья событий полезны при оценке рисков в проектах, где возможны цепочки событий с временной зависимостью. Например, в управлении проектами дерево событий может моделировать риски, связанные с отказами оборудования или задержками в процессе, учитывая вероятность возникновения проблем на каждом этапе [29]. Данный подход позволяет предсказать вероятные сценарии развития событий и разработать стратегии минимизации рисков.

Оптимизация в теоретико-игровых моделях

Теоретико-игровое моделирование представляет собой метод анализа стратегических взаимодействий между участниками с целью оптимизации их стратегий [30]. Данный метод широко применяется для изучения ситуаций конфликта или сотрудничества, где каждый участник стремится максимизировать свой выигрыш или минимизировать потери в зависимости от решений других участников.

Ключевым понятием в теории игр является равновесие Нэша. Равновесие Нэша возникает, когда ни один участник не имеет мотивации изменить свою стратегию, учитывая выбранные стратегии других участников. Это означает, что при данной стратегии каждого игрока никто не имеет желания изменить свои действия, т.к. любое отклонение от текущей стратегии не приведет к улучшению его выигрыша.

Математическая формулировка: (S, H) – некооперативная игра n лиц в нормальной форме, где S – набор чистых стратегий, а H – набор выигрышей. Когда каждый игрок $i \in \{1, \dots, n\}$ выбирает стратегию $x\{i\}$, принадлежащую S в профиле стратегий $(x\{1\}, \dots, (x\{n\}))$, игрок i получает свой выигрыш $H\{i\}(x)$. Профиль стратегий $x^*\{i\} \in S$ является равновесием по Нэшу, если изменение своей стратегии с $x^*\{i\}$ на $x\{i\}$ не выгодно ни одному игроку i , т.е. для любого игрока i : $H_i(x^*) \geq H_i(x_i, x_{-i}^*)$.

Работа [31] посвящена решению задач оптимизации в условиях неопределенности с использованием теории игр, в частности модели игры с природой. Данная модель применяется, когда участник (игрок) взаимодействует с внешней средой, поведение которой невозможно контролировать и которая представляется в виде «природы» или внешнего фактора неопределенности. Для выбора оптимальной стратегии использовались три классических критерия: Вальда, Байеса и Гурвица.

Встроенные методы оптимизации в дискретно-событийных и гибридных моделях

Дискретно-событийное и гибридное моделирование с встроенной процессной оптимизацией представляют методы оптимизации системных процессов в контексте научных исследований. Дискретно-событийное моделирование позволяет представлять систему в виде набора сущностей и ресурсов, акцентируя изменения, связанные с дискретными событиями, в то время как гибридное моделирование, объединяя дискретные и непрерывные аспекты, обеспечивает более точное отражение динамики систем [32].

Процессная оптимизация, встроенная в модели, представляет собой интегрированный механизм, направленный на автоматическую регулировку параметров, эффективное управление ресурсами и динамическую адаптацию процессов в процессе моделирования.

Данный подход к оптимизации работает при простом изменении варьируемых параметров (например, при разных дискретных значениях мощности ресурсов), однако значительно усложняется с появлением различных по структуре вариантов осуществления процессов. Кроме того, некоторые из существующих сред имитационного моделирования, имеющие встроенную подсистему процессной оптимизации, предполагают ручную настройку репликаций, что вызывает сложности ввиду большого объема требуемых для задачи репликаций и вероятности человеческой ошибки: пользователь может случайно упустить оптимальный вариант из списка прогонов.

Также наблюдается тенденция к использованию гибридного моделирования для описания сложных социально-экономических и социотехнических систем. Данный подход включает в себя комбинации базовых парадигм имитационного моделирования. Гибридное моделирование позволяет рассматривать систему с различных точек зрения, что позволяет получить более полное и точное представление о ее поведении [33].

Метод дифференциальной эволюции

Метод дифференциальной эволюции является одним из методов эволюционного моделирования, предназначенным для решения задачи многомерной

оптимизации. По классификации оптимизационных методов он относится к классу стохастических методов, т.к. использует в процессе поиска решения генератор случайных чисел. Также он использует и некоторые идеи генетических алгоритмов, но, в отличие от них, не требует работы с переменными в бинарном коде.

Алгоритм работы метода начинается с инициализации начальной популяции точек (кандидатов), которая случайным образом генерируется в пространстве поиска. Эта популяция представляет потенциальные решения для оптимизационной задачи [34]. На следующем этапе осуществляется выбор трех случайных точек (векторов) из текущей популяции. Эти три точки будут использоваться для создания нового вектора, который представляет собой потомка в процессе мутации.

Разностное векторное уточнение представляет собой создание нового вектора (потомка) путем разности двух случайных векторов, умноженной на коэффициент масштабирования. Этот шаг моделирует мутацию, внося разнообразие в популяцию и обеспечивая новые кандидаты для оптимизации.

Следующий этап – скрещивание (кроссовер), где происходит сравнение элементов нового вектора с элементами базового вектора. Если элемент нового вектора лучше (меньше) соответствующего элемента базового вектора, то он заменяет соответствующий элемент базового вектора. Этот механизм обеспечивает сохранение лучших характеристик векторов в популяции.

Оценка приспособленности происходит путем использования функции цели (стоимости). Новый вектор оценивается, и, если он оказывается лучше (имеет более низкую стоимость), чем старый вектор, то новый вектор принимается в популяцию.

Шаги повторяются до достижения критерия остановки, такого как максимальное количество итераций или достижение необходимого уровня приспособленности. Таким образом, метод дифференциальной эволюции эффективно итеративно улучшает популяцию кандидатов в поиске оптимального решения задачи оптимизации.

Генетический алгоритм оптимизации

Генетический алгоритм – это метод эволюционной оптимизации, основанный на механизмах естественного отбора и генетической эволюции [35]. Основная цель этого метода – найти оптимальное решение задачи путем имитации эволюционного процесса. Алгоритм начинается с инициализации, в ходе которой создается начальная популяция, состоящая из множества возможных решений задачи, представленных в виде хромосом, где каждая хромосома кодирует определенное решение в пространстве поиска. На каждом шаге работы алгоритма оценивается

приспособленность каждого индивидуума с помощью целевой функции, значение которой отражает качество соответствующего решения. Особи с наибольшей приспособленностью получают преимущество в процессе отбора для дальнейших этапов эволюции.

В основе эволюционного процесса лежат операции селекции, скрещивания и мутации. Селекция осуществляется для выбора наиболее приспособленных особей, которые формируют основу новой популяции. Скрещивание комбинирует генетические данные двух родителей, порождая потомков с объединенными характеристиками, что способствует исследованию новых комбинаций признаков. Мутация вносит случайные изменения в генотип отдельных хромосом, позволяя исследовать новые области пространства решений и предотвращая преждевременную сходимость алгоритма к локальным экстремумам. После применения этих операций формируется новая популяция, которая заменяет предыдущую. Процесс повторяется до достижения заданного числа итераций или получения решения с приемлемым уровнем качества.

Эффективность генетического алгоритма во многом определяется настройкой ключевых параметров, таких как размер популяции, вероятность мутации и скрещивания, а также количество итераций. Данные параметры регулируют баланс между исследованием пространства решений и уточнением текущих оптимальных значений, что делает этот подход универсальным.

Например, в статье [36] рассматривается применение генетического алгоритма, основанного на теории естественного отбора, для решения задач оптимизации. Авторы демонстрируют эффективность предложенного подхода на примере оптимизации функции распределения нагрузки в системах с ограниченными ресурсами. Генетический алгоритм использовался для нахождения оптимального распределения задач между доступными вычислительными узлами таким образом, чтобы минимизировать общее время выполнения и одновременно сбалансировать нагрузку между узлами.

Метод глобальной оптимизации с отжигом

Метод глобальной оптимизации с отжигом (Simulated Annealing, SA) представляет собой эвристический алгоритм, который нашел свое вдохновение в физическом процессе отжига металла [37]. Метод стал частью инструментария для решения сложных задач глобальной оптимизации, особенно в ситуациях, когда пространство поиска может быть сложным, содержащим множество локальных минимумов или обладающим неопределенными характеристиками.

Основная концепция метода симулирует процесс охлаждения материала после нагрева. Начальная

«температура» алгоритма определяет степень агрессивности его шагов в пространстве решений. На начальных этапах процесса алгоритм более толерантен к случайным изменениям, что позволяет ему избегать застревания в локальных минимумах. С течением времени температура постепенно снижается, что уменьшает вероятность принятия худших решений, делая алгоритм более сфокусированным на поиске глобальных оптимумов.

Механизм работы метода глобальной оптимизации с отжигом позволяет алгоритму с легкостью преодолевать локальные минимумы благодаря случайному природному блужданию по пространству решений. Это обеспечивает более широкий охват поиска оптимальных решений в сложных и многомерных пространствах.

Метод роя частиц

Метод роя частиц (Particle Swarm Optimization, PSO) – один из эвристических алгоритмов, вдохновленных коллективным поведением природных систем, таких как стаи птиц или косяки рыб [38]. Алгоритм применяется для решения задач оптимизации, особенно в случаях, когда пространство поиска характеризуется высокой размерностью, нелинейностью и наличием многочисленных локальных оптимумов.

В основе PSO лежит идея имитации движения частиц, каждая из которых представляет собой потенциальное решение задачи. Каждая частица характеризуется своим положением и скоростью, которые обновляются на каждом шаге алгоритма. Обновление происходит с учетом двух ключевых факторов: личного опыта частицы (лучшего положения, которое она обнаружила ранее) и коллективного опыта группы (лучшего решения, найденного среди всех частиц). Это позволяет частицам одновременно исследовать пространство поиска и сосредотачиваться на наиболее перспективных областях [39].

Алгоритм PSO имеет несколько параметров, таких как коэффициент инерции, параметры когнитивного и социального влияния, которые определяют динамику движения частиц и их способность к исследованию и поиску. Правильная настройка этих параметров способствует балансированию между глобальным исследованием пространства решений и его локальной проработкой.

Применение метода роя частиц охватывает широкий спектр задач оптимизации, включая обучение машин, проектирование нейронных сетей, а также в различных инженерных и научных областях.

Метод оптимизации колонии муравьев

Оптимизация колонии муравьев (Ant Colony Optimization, ACO) – это эвристический метод,

разработанный на основе наблюдений за коллективным поведением муравьев в природе [40]. В его основе лежит концепция использования феромонов и стигмергии для решения задач оптимизации. Принцип работы ACO базируется на моделировании поведения муравьев, которые при поиске пищи оставляют химический след – феромоны. Данные следы служат ориентиром для других муравьев, повышая вероятность того, что они пойдут по тому же маршруту.

Особенностью алгоритма является динамическое обновление феромонных следов. При этом более короткие и эффективные пути получают усиление за счет большего количества феромонов, оставляемых муравьями. Такой механизм позволяет алгоритму постепенно концентрироваться на наиболее оптимальных решениях, устраняя менее перспективные маршруты [41]. Метод ACO эффективен в задачах, где требуется исследовать большое пространство возможных решений и выбрать наилучшее из них.

Применение ACO охватывает широкий спектр задач оптимизации. Например, метод активно используется в задачах маршрутизации, где необходимо найти оптимальные пути в сетях, таких как транспортные системы или компьютерные сети. Распараллеливание алгоритма, заключающееся в разделении работы на несколько независимых агентов, позволяет существенно сократить время вычислений и сделать алгоритм применимым для задач с большим количеством переменных.

Метод искусственной колонии пчел

Метод искусственной пчелиной колонии (Artificial Bee Colony, ABC) является оптимизационным алгоритмом, который моделирует стратегии поиска источников пищи пчел в природе [42]. В алгоритме выделяют три типа пчел: рабочие, наблюдатели и разведчики.

На начальном этапе имеется предварительная информация о расположении источников пищи, представляющих допустимые решения задачи оптимизации. Рабочие пчелы направляются к этим источникам, проводят поиск в их окрестности и запоминают новые решения, улучшающие параметры задачи.

После завершения этапа поиска рабочие пчелы возвращаются в «улей» и передают информацию пчелам-наблюдателям о более привлекательных источниках. Пчелы-наблюдатели вероятностным образом выбирают источник для начала своего поиска, проводя его аналогично рабочим пчелам. Новые решения сохраняются только в случае улучшения качества по заданным параметрам. Процесс поиска продолжается до достижения заданного числа итераций [43].

Метод двойного отжига

Двойной отжиг (Dual Annealing, DA) – это стохастический метод глобальной оптимизации, который является расширением алгоритма имитационного отжига (Simulated Annealing, SA) [44]. Метод предназначен для повышения эффективности поиска глобального оптимума за счет использования локального алгоритма поиска в дополнение к процедуре имитационного отжига. Такой подход позволяет повысить точность нахождения оптимального решения, особенно в задачах с большим количеством локальных экстремумов.

Основной принцип двойного отжига заключается в том, что на начальном этапе используется стохастический процесс глобального поиска, основанный на принципах термодинамического отжига. Моделируемый отжиг успешно определяет область пространства решений, в которой находится глобальный оптимум, но не всегда гарантирует нахождение точного решения внутри этой области. Чтобы преодолеть это ограничение, алгоритм двойного

отжига на заключительном этапе применяет локальный метод оптимизации к решению, найденному с помощью моделируемого отжига. Локальный поиск позволяет уточнить найденное решение, минимизируя риск пропуска глобального оптимума из-за недостаточной проработки ограниченной области пространства решений.

Алгоритм DA успешно применяется в задачах, где пространство поиска является сложным, многомерным и содержит множество локальных экстремумов. Например, в задачах оптимизации инженерных конструкций, при разработке сложных технических систем или для настройки гиперпараметров в моделях машинного обучения двойной отжиг демонстрирует высокую эффективность. Его способность комбинировать преимущества глобального и локального поиска делает этот метод универсальным и пригодным для решения

Тем не менее, детальное исследование эволюционных методов оптимизации представляет собой отдельную область научного исследования.

Сравнительный анализ методов оптимизации представлен в таблице.

Таблица. Сравнение методов оптимизации

Метод	Тип	Область применения	Достоинства	Недостатки
Стохастическое оптимизационное моделирование методом Монте-Карло	Стохастический	Имитация случайных процессов, оценка вероятностей, оптимизация сложных систем	Простота, универсальность, высокая точность	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным
Оптимизация методом максимального правдоподобия	Детерминированный	Оценка параметров модели на основе данных	Точность, эффективность	Требует знания формы целевой функции, может быть чувствительным к выбору начальных значений
Оптимизация в байесовских моделях	Детерминированный	Анализ вероятностей, учет априорных данных, прогнозирование	Точность, гибкость, учет априорных данных	Требует знания формы целевой функции, может быть вычислительно затратным
Метод дифференциальной эволюции	Эволюционный	Глобальная оптимизация многомерных функций	Эффективность, устойчивость к локальным минимумам	Требует знания формы целевой функции, может быть чувствительным к выбору параметров
Метод «генетический алгоритм оптимизации»	Эволюционный	Поиск оптимальных решений в сложных задачах	Устойчивость к локальным минимумам, решение многокритериальных задач	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным
Метод глобальной оптимизации с отжигом	Эволюционный	Имитация процесса отжига металлов для поиска глобального минимума	Эффективность, устойчивость к локальным минимумам	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным
Метод роя частиц	Эволюционный	Коллективный поиск оптимальных решений, имитация поведения роя пчел	Эффективность, устойчивость к локальным минимумам	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным
Метод оптимизации колонии муравьев	Эволюционный	Поиск кратчайших путей, оптимизация маршрутов	Эффективность, устойчивость к локальным минимумам	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным

Таблица. Продолжение

Метод	Тип	Область применения	Достоинства	Недостатки
Метод искусственной колонии пчел	Эволюционный	Имитация поведения пчел-разведчиц и пчел-фуражиров для поиска решений	Эффективность, устойчивость к локальным минимумам	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным
Метод двойного отжига	Эволюционный	Использования двух температурных режимов	Эффективность, устойчивость к локальным минимумам	Требует большого количества вычислений, может быть вычислительно затратным
Оптимизационное моделирование на основе дерева событий	Стохастический	Анализ рисков, оценка вероятности наступления событий	Точность, гибкость	Требует знания формы целевой функции, может быть вычислительно затратным
Интерполяционная оптимизация вероятностных распределений	Стохастический	Моделирование сложных вероятностных распределений	Точность, гибкость	Требует знания формы целевой функции, может быть вычислительно затратным
Смешанно-целочисленное оптимизационное программирование	Детерминированный	Решение задач оптимизации с дискретными переменными	Точность, эффективность	Требует знания формы целевой функции, может быть вычислительно затратным
Оптимизация в теоретико-игровых моделях	Детерминированный	Анализ и оптимизация стратегий в конкурентных средах	Точность, гибкость	Требует знания формы целевой функции, может быть вычислительно затратным
Дискретно-событийные и гибридные модели	Стохастический	Оптимизация динамических систем с дискретными событиями	Точность, гибкость	Требует знания формы целевой функции, может быть вычислительно затратным

Стохастические методы используются во многих областях, поскольку являются базовыми методами оценки параметров модели, учета различных вероятностных факторов и хорошо подходят для подгонки моделей.

В детерминированных методах оптимизации процесс полностью определен и предсказуем. Алгоритмы детерминированной оптимизации стремятся найти решение, следуя строго заданному набору правил или процедуре.

Эволюционные алгоритмы работают, создавая популяцию кандидатов, подвергая их эволюционным операторам, таким как скрещивание, мутация и отбор, чтобы постепенно улучшить популяцию в направлении оптимизации заданной функции. Методы также могут использоваться для многокритериальной оптимизации, когда необходимо учитывать несколько целевых функций.

На основе приведенных результатов можно сформулировать алгоритм выбора необходимого метода оптимизации:

- Сначала требуется определить качество входных данных, насколько полной является выборка, сколько признаков рассмотрено. В зависимости от этого выбрать группу методов, основанных

на апостериорной или на аппроксимационной оценке.

- Следующим шагом требуется рассмотреть область применения, оценить сложность системы, выбрать объект оптимизации. В зависимости от задачи и ожидаемых результатов выбрать метод.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье осуществлен аналитический обзор методов оптимизации и приведена их классификация. На основе рассмотренных методов выделены две основные категории: методы, основанные на оценке параметров апостериорного распределения, и методы, основанные на неточной и аппроксимационной оценке. Указаны достоинства и недостатки каждого метода в рамках применимости к моделям.

Результаты исследования полезны как для научных исследований в области оптимизации моделей, так и для практического использования в процессе разработки моделей и систем поддержки принятия решений на их основе.

Дальнейшие перспективы развития исследования предполагают детальное изучение эволюционных

методов оптимизации, а также сравнение эффективности методов оптимизации на практике на базе нескольких различных моделей с целью более глубокого понимания их применимости и результативности.

БЛАГОДАРНОСТИ

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (государственное задание № 075-03-2025-256 от 16.01.2025).

ACKNOWLEDGMENTS

The research was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (State Assignment No. 075-03-2025-256 dated January 16, 2025).

Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution

All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Космачева И.М., Давидюк Н.В., Сибикина И.В., Кучин И.Ю. Модель оценки эффективности конфигурации системы защиты информации на базе генетических алгоритмов. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2020;8(3):40–41. <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2020.30.3.022>
2. Бекетов С.М., Поспелов К.Н., Редько С.Г. Имитационная модель человеческого капитала в инновационных проектах. *Проблемы управления*. 2024;3:20–31. <http://doi.org/10.25728/ru.2024.3.2>
3. Кенден К.В., Кузнецов А.В. Оптимизация методом роя частиц структуры автономного энергетического комплекса с использованием солнечной энергии. *Вестник Иркутского государственного технического университета*. 2020;24(3):616–626. <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-3-616-626>
4. Филиппова К.А., Редько С.Г. Использование метода имитационного моделирования в медицинском учреждении с целью оптимизации перемещения пациентов в условиях ограничений пандемии COVID-19. *Вопросы устойчивого развития общества*. 2023;(4 МКВГ). <https://doi.org/10.34755/IROK.2022.61.82.009>
5. Van Thieu N., Mirjalili S. MEALPY: An open-source library for latest meta-heuristic algorithms in Python. *J. Syst. Architecture*. 2023;139:102871. <https://doi.org/10.1016/j.sysarc.2023.102871>
6. Dalavi A.M., Gomes A., Husain A.J. Bibliometric analysis of nature inspired optimization techniques. *Comput. Ind. Eng.* 2022;169:108161. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108161>
7. Nagpal A., Gabrani G. Python for data analytics, scientific and technical applications. In: *2019 Amity International Conference on Artificial Intelligence (AICAI)*. IEEE; 2019. P. 140–145. <https://doi.org/10.1109/AICAI.2019.8701341>
8. Gintciak A.M., Bolsunovskaya M.V., Burlutskaya Z.V., Petryaeva A.A. Hybrid Simulation as a Key Tool for Socio-economic Systems Modeling. In: Vasiliev Y.S., Pankratova N.D., Volkova V.N., Shipunova O.D., Lyabakh N.N. (Eds.). *System Analysis in Engineering and Control*. Book Series: *Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer; 2022. V. 442. P. 262–272. https://doi.org/10.1007/978-3-030-98832-6_23
9. Николаев С.В. Многоаспектность и системность цифровой трансформации: устойчивое развитие на примере транспортного комплекса. *E-Management*. 2023;6(3):39–50. <https://doi.org/10.26425/2658-3445-2023-6-3-39-50>
10. Lychkina N. Modelling of Developing Socio-economic Systems Using Multiparadigm Simulation Modelling: Advancing Towards Complexity Theory and Synergetics. In: Perko I., Espejo R., Lepskiy V., Novikov D.A. (Eds.). *World Organization of Systems and Cybernetics 18. Congress-WOSC2021*. Book Series: *Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer; 2022. V. 495. P. 191–204. https://doi.org/10.1007/978-3-031-08195-8_19
11. Певнева А.Г., Калинин М.Е. *Методы оптимизации*. СПб.: Университет ИТМО; 2020. 64 с.
12. Ciufolini I., Paolozzi A. Mathematical prediction of the time evolution of the COVID-19 pandemic in Italy by a Gauss error function and Monte Carlo simulations. *Eur. Phys. J. Plus*. 2020;135(4):355. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00383-y>
13. Kannan D., Moazzeni S., Darmian S.M. A hybrid approach based on MCDM methods and Monte Carlo simulation for sustainable evaluation of potential solar sites in east of Iran. *J. Clean. Product*. 2021;279:122368. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.122368>
14. Xue H., Shen X., Pan W. Constrained maximum likelihood-based Mendelian randomization robust to both correlated and uncorrelated pleiotropic effects. *Am. J. Human Genet.* 2021;108(7):1251–1269. <https://doi.org/10.1016/j.ajhg.2021.05.014>
15. Ломиворотов Р.В. Использование байесовских методов для анализа денежно-кредитной политики в России. *Прикладная эконометрика*. 2015;38(2):41–63.
16. Щеглевых Р.В., Сысоев А.С. Математическая модель обнаружения аномальных наблюдений с использованием анализа чувствительности нейронной сети. *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2020;8(1):14. <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2020.28.1.020>
17. Манаширов Э.С. Теоретические рамки плановой экономики и налогообложения: анализ эффекта на средний класс и оптимизация налоговых схем. *Инновации и инвестиции*. 2023;10:272–276.
18. Васильева Е.В., Громова А.А., Вишневская Н.А. Модель машинного обучения для оптимизации организации работы сотрудников офиса в удаленном и гибридном режимах. *Инновации и инвестиции*. 2023;5:288–295.

19. Глотов А.Ф. *Начала математического моделирования в электронике*. Томск: Изд-во Томского политехнического университета; 2017. 363 с.
20. Горюнов О.В., Куриков Н.Н., Егоров К.А. Интерполяционный метод оценки вероятности отказа при сложном нагружении. *Труды НГТУ им. П.Е. Алексеева*. 2023;1(140):42–52.
21. Ruiz-Arias J.A. Mean-preserving interpolation with splines for solar radiation modeling. *Solar Energy*. 2022;248:121–127. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2022.10.038>
22. Bourguignon S., Ninin J., Carfantan H., Mongeau M. Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming: Formulations and computational performance. *IEEE Trans. Signal Process.* 2015;64(6):1405–1419. <https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2496367>
23. Ponz-Tienda J.L., Salcedo-Bernal A., Pellicer E. A parallel branch and bound algorithm for the resource leveling problem with minimal lags. *Comput. Aided Civil Infrastruct. Eng.* 2017;32(6):474–498. <https://doi.org/10.1111/mice.12233>
24. Bertsimas D., Tsitsiklis J.N. Integer programming methods. In: *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, MA: Athena Scientific; 1997. V. 6. P. 479–530.
25. Bolusani S., Ralphs T.K. A framework for generalized Benders' decomposition and its application to multilevel optimization. *Math. Program.* 2022;196(1):389–426. <https://doi.org/10.1007/s10107-021-01763-7>
26. Kleinert T., Labbé M., Ljubić I., Schmidt M. A survey on mixed-integer programming techniques in bilevel optimization. *EURO J. Computational Opt.* 2021;9(2):100007. <https://doi.org/10.1016/j.ejco.2021.100007>
27. Кондратов Д.В., Володин Д.Н. Математическое моделирование алгоритмов машинного обучения. *Математическое моделирование, компьютерный и натуральный эксперимент в естественных науках*. 2023;2:2–7. <https://doi.org/10.24412/2541-9269-2023-2-02-07>
28. Sprague C.I., Ögren P. Continuous-time behavior trees as discontinuous dynamical systems. *IEEE Control Syst. Lett.* 2021;6:1891–1896. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3134453>
29. Phiri D., Simwanda M., Nyirenda V.R., et al. Decision tree algorithms for developing rulesets for object-based land cover classification. *ISPRS Int. J. Geo-Inf.* 2020;9(5):329. <https://doi.org/10.3390/ijgi9050329>
30. Белозёров С.А., Соколовская Е.В. Теоретико-игровой подход к моделированию конфликта интересов: экономические санкции. *Terra Economicus*. 2022;20(1):65–80. <http://doi.org/10.18522/2073-6606-2022-20-1-65-80>
31. Петриченко Д.Г., Петриченко Г.С. Решение ситуационных задач в сфере недвижимости в условиях неопределенности. *Вестник Академии знаний*. 2023;54(1):400–405.
32. Макаров В.Л., Бахтизин А.Р., Бекларян Г.Л., Акопов А.С. Цифровой завод: методы дискретно-событийного моделирования и оптимизации производственных характеристик. *Бизнес-информатика*. 2021;15(2):7–20. <http://doi.org/10.17323/2587-814X.2021.2.7.20>
33. Болсуновская М.В., Гишняк А.М., Бурлуцкая Ж.В., Петряева А.А., Зубкова Д.А., Успенский М.Б., Селедцова И.А. Возможности применения гибридного подхода в моделировании социально-экономических и социотехнических систем. *Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*. 20224(3):73–86. <https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/3/73-86>
34. Ahmad M.F., Isa N.A.M., Lim W.H., Ang K.M. Differential evolution: A recent review based on state-of-the-art works. *Alexandria Eng. J.* 2022;61(5):3831–3872. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.013>
35. Холодков Д.В. Анализ особенностей применения генетических алгоритмов. *Вестник науки*. 2024;4(4–73):678–682.
36. Albadr M.A., Tiun S., Al-Dhief F.T., Ayob M. Genetic algorithm based on natural selection theory for optimization problems. *Symmetry*. 2020;12(11):1758. <https://doi.org/10.3390/sym12111758>
37. Костин А.С., Майоров Н.Н. Исследование моделей и методов маршрутизации и практического выполнения автономного движения беспилотными транспортными системами для доставки грузов. *Вестник Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова*. 2023;15(3):524–536. <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2023-15-3-524-536>
38. Словохотов Ю.Л., Новиков Д.А. Распределенный интеллект мультиагентных систем. Ч. 2. Коллективный интеллект социальных систем. *Проблемы управления*. 2023;6:3–21. <https://doi.org/10.25728/pu.2023.6.1>
39. Gad A.G. Particle swarm optimization algorithm and its applications: a systematic review. *Arch. Computat. Methods Eng.* 2022;29(5):2531–2561. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09694-4>
40. Кулиев Э.В., Запорожец Д.Ю., Кравченко Ю.А., Семенова М.М. Решение задачи интеллектуального анализа данных на основе биоинспирированного алгоритма. *Известия Южного федерального университета. Технические науки*. 2021;6(223):89–99. <https://doi.org/10.18522/2311-3103-2021-6-89-99>
41. Dorigo M., Stützle T. Ant colony optimization: overview and recent advances. In: Gendreau M., Potvin J.Y. (Eds.). *Handbook of Metaheuristics. International Series in Operations Research & Management Science*. Springer; 2019. P. 311–351. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1665-5_8
42. Курейчик В.В., Родзин С.И. Вычислительные модели эволюционных и роевых биоэвристик (обзор). *Информационные технологии*. 2021;27(10):507–520. <https://doi.org/10.17587/it.27.507-520>
43. Almufthi S.M., Alkurdi A.A.H., Khoursheed E.A. Artificial Bee Colony Algorithm Performances in Solving Constraint-Based Optimization Problem. *Telematique*. 2022;21(1):6785–6799.
44. Lee J., Perkins D. A simulated annealing algorithm with a dual perturbation method for clustering. *Pattern Recogn.* 2021;112:107713. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2020.107713>

REFERENCES

1. Kosmacheva I.M., Davidyuk N.V., Sibikina I.V., Kuchin I.Yu. The model for evaluating the effectiveness of an information security system configuration based on genetic algorithms. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2020;8(3):40–41 (in Russ.). <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2020.30.3.022>
2. Beketov S.M., Pospelov K.N., Redko S.G. A human capital simulation model in innovation projects. *Control Sci.* 2024;3: 16–25. <http://doi.org/10.25728/cs.2024.3.2>
[Original Russian Text: Beketov S.M., Pospelov K.N., Redko S.G. A human capital simulation model in innovation projects. *Problemy upravleniya*. 2024;3:20–31 (in Russ.). <http://doi.org/10.25728/pu.2024.3.2>]
3. Kenden K.V., Kuznetsov A.V. Particle swarm optimisation for the structure of an autonomous solar energy complex. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta = Proceedings of Irkutsk State Technical University*. 2020;24(3):616–626 (in Russ.). <https://doi.org/10.21285/1814-3520-2020-3-616-626>
4. Filippova K.A., Redko S.G. The use of the simulation modeling method in a medical institution in order to optimize the movement of patients under the constraints of the COVID-19 pandemic. *Voprosy ustoichivogo razvitiya obshchestva*. 2023;(4 MKVG) (in Russ.). <https://doi.org/10.34755/IROK.2022.61.82.009>
5. Van Thieu N., Mirjalili S. MEALPY: An open-source library for latest meta-heuristic algorithms in Python. *J. Syst. Architecture*. 2023;139:102871. <https://doi.org/10.1016/j.sysarc.2023.102871>
6. Dalavi A.M., Gomes A., Husain A.J. Bibliometric analysis of nature inspired optimization techniques. *Comput. Ind. Eng.* 2022;169:108161. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2022.108161>
7. Nagpal A., Gabrani G. Python for data analytics, scientific and technical applications. In: *2019 Amity International Conference on Artificial Intelligence (AICAI)*. IEEE; 2019. P. 140–145. <https://doi.org/10.1109/AICAI.2019.8701341>
8. Gintciak A.M., Bolsunovskaya M.V., Burlutskaya Z.V., Petryaeva A.A. Hybrid Simulation as a Key Tool for Socio-economic Systems Modeling. In: Vasiliev Y.S., Pankratova N.D., Volkova V.N., Shipunova O.D., Lyabakh N.N. (Eds.). *System Analysis in Engineering and Control*. Book Series: *Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer; 2022. V. 442. P. 262–272. https://doi.org/10.1007/978-3-030-98832-6_23
9. Nikolaev S.V. Multidimensional and systematic digital transformation: sustainable development on the example of the transport industry. *E-Management*. 2023;6(3):39–50 (in Russ.). <https://doi.org/10.26425/2658-3445-2023-6-3-39-50>
10. Lychkina N. Modelling of Developing Socio-economic Systems Using Multiparadigm Simulation Modelling: Advancing Towards Complexity Theory and Synergetics. In: Perko I., Espejo R., Lepskiy V., Novikov D.A. (Eds.). *World Organization of Systems and Cybernetics 18. Congress-WOSC2021*. Book Series: *Lecture Notes in Networks and Systems*. Springer; 2022. V. 495. P. 191–204. https://doi.org/10.1007/978-3-031-08195-8_19
11. Pevneva A.G., Kalinkina M.E. *Metody optimizatsii (Optimization Methods)*. St. Petersburg: ITMO University; 2022. 64 p. (in Russ.).
12. Ciufolini I., Paolozzi A. Mathematical prediction of the time evolution of the COVID-19 pandemic in Italy by a Gauss error function and Monte Carlo simulations. *Eur. Phys. J. Plus*. 2020;135(4):355. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00383-y>
13. Kannan D., Moazzeni S., Darmian S.M. A hybrid approach based on MCDM methods and Monte Carlo simulation for sustainable evaluation of potential solar sites in east of Iran. *J. Clean. Product*. 2021;279:122368. <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2020.122368>
14. Xue H., Shen X., Pan W. Constrained maximum likelihood-based Mendelian randomization robust to both correlated and uncorrelated pleiotropic effects. *Am. J. Human Genet.* 2021;108(7):1251–1269. <https://doi.org/10.1016/j.ajhg.2021.05.014>
15. Lomivorotov R.V. The use of Bayesian methods for the analysis of monetary policy in Russia. *Prikladnaya ekonometrika = Applied Econometrics*. 2015;38(2):41–63 (in Russ.).
16. Scheglevatych R.V., Sysoev A.S. Mathematical model to detect anomalies using Sensitivity Analysis applying to neural network. *Modelirovanie, optimizatsiya i informatsionnye tekhnologii = Modeling, Optimization and Information Technology*. 2022;8(1):14 (in Russ.). <https://doi.org/10.26102/2310-6018/2020.28.1.020>
17. Manashirov E.S. Theoretical framework of a planned economy and taxation: analysis of the effect on the middle class and optimization of tax schemes. *Innovatsii i investitsii = Innovations and Investments*. 2023;10:272–276 (in Russ.).
18. Vasileva E.V., Gromova A.A., Vishnevskaya N.A. Machine learning model for optimizing the organization of work of office employees in remote and hybrid modes. *Innovatsii i investitsii = Innovations and Investments*. 2023;5:288–295 (in Russ.).
19. Glotov A.F. *Nachala matematicheskogo modelirovaniya v elektronike (Beginnings of Mathematical Modeling in Electronics)*. Tomsk: Tomsk Polytechnic University; 2017. 363 p. (in Russ.).
20. Goryunov O.V., Kurikov N.N., Egorov K.A. Interpolation method to evaluate the possibility of failure in case of complex load. *Trudy NGTU im. R.E. Alekseeva = Transactions of NNSTU n.a. R.E. Alekseev*. 2023;1(140):42–52 (in Russ.).
21. Ruiz-Arias J.A. Mean-preserving interpolation with splines for solar radiation modeling. *Solar Energy*. 2022;248:121–127. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2022.10.038>
22. Bourguignon S., Ninin J., Carfantan H., Mongeau M. Exact sparse approximation problems via mixed-integer programming: Formulations and computational performance. *IEEE Trans. Signal Process.* 2015;64(6):1405–1419. <https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2496367>

23. Ponz-Tienda J.L., Salcedo-Bernal A., Pellicer E. A parallel branch and bound algorithm for the resource leveling problem with minimal lags. *Comput. Aided Civil Infrastruct. Eng.* 2017;32(6):474–498. <https://doi.org/10.1111/mice.12233>
24. Bertsimas D., Tsitsiklis J.N. Integer programming methods. In: *Introduction to Linear Optimization*. Belmont, MA: Athena Scientific; 1997. V. 6. P. 479–530.
25. Bolusani S., Ralphs T.K. A framework for generalized Benders' decomposition and its application to multilevel optimization. *Math. Program.* 2022;196(1):389–426. <https://doi.org/10.1007/s10107-021-01763-7>
26. Kleinert T., Labbé M., Ljubić I., Schmidt M. A survey on mixed-integer programming techniques in bilevel optimization. *EURO J. Computational Opt.* 2021;9(2):100007. <https://doi.org/10.1016/j.ejco.2021.100007>
27. Kondratov D.V., Volodin D.N. Mathematical modeling of machine learning algorithms. *Matematicheskoe modelirovanie, komp'yuternyi i naturnyi eksperiment v estestvennykh naukakh.* 2023;2:2–7 (in Russ.). <https://doi.org/10.24412/2541-9269-2023-2-02-07>
28. Sprague C.I., Ögren P. Continuous-time behavior trees as discontinuous dynamical systems. *IEEE Control Syst. Lett.* 2021;6:1891–1896. <https://doi.org/10.1109/LCSYS.2021.3134453>
29. Phiri D., Simwanda M., Nyirenda V.R., et al. Decision tree algorithms for developing rulesets for object-based land cover classification. *ISPRS Int. J. Geo-Inf.* 2020;9(5):329. <https://doi.org/10.3390/ijgi9050329>
30. Belozarov S., Sokolovskaya E. The game-theoretic approach to modeling the conflict of interests: The economic sanctions. *Terra Economicus.* 2022;20(1):65–80 (in Russ.). <http://doi.org/10.18522/2073-6606-2022-20-1-65-80>
31. Petrichenko D.G., Petrichenko G.S. Solving real estate situational problems in conditions of uncertainty. *Vestnik Akademii znaniy = Bulletin of the Academy of Knowledge.* 2023;54(1):400–405 (in Russ.).
32. Makarov V.L., Bakhtizin A.R., Beklaryan G.L., Akopov A.S. Digital plant: methods of discrete-event modeling and optimization of production characteristics. *Biznes-informatika = Business Informatics.* 2021;15(2):7–20 (in Russ.). <http://doi.org/10.17323/2587-814X.2021.2.7.20>
33. Bolsunovskaya M.V., Gintsyuk A.M., Burlutskaya Zh.V., Petryaeva A.A., Zubkova D.A., Uspenskii M.B., Seledtsova I.A. The opportunities of using a hybrid approach for modeling socio-economic and sociotechnical systems. *Vestnik VGU. Seriya: Sistemnyi analiz i informatsionnye tekhnologii = Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems Analysis and Information Technologies.* 2022.;3:73–86 (in Russ.). <https://doi.org/10.17308/sait/1995-5499/2022/3/73-86>
34. Ahmad M.F., Isa N.A.M., Lim W.H., Ang K.M. Differential evolution: A recent review based on state-of-the-art works. *Alexandria Eng. J.* 2022;61(5):3831–3872. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2021.09.013>
35. Holodkov D.V. Analysis of features of application of genetic algorithms. *Vestnik nauki.* 2024;4(4–73):678–682 (in Russ.).
36. Albadr M.A., Tiun S., Al-Dhief F.T., Ayob M. Genetic algorithm based on natural selection theory for optimization problems. *Symmetry.* 2020;12(11):1758. <https://doi.org/10.3390/sym12111758>
37. Kostin A.S., Maiorov N.N. Research of models and methods for routing and practical implementation of autonomous movement by unmanned transport systems for cargo delivery. *Vestnik Gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota imeni admirala S.O. Makarova.* 2023;15(3):524–536 (in Russ.). <https://doi.org/10.21821/2309-5180-2023-15-3-524-536>
38. Slovokhotov Yu.L., Novikov D.A. Distributed intelligence of multi-agent systems. Part II: Collective intelligence of social systems. *Control Sci.* 2023;6:2–17. <https://doi.org/10.25728/cs.2023.6.1>
[Original Russian Text: Slovokhotov Yu.L., Novikov D.A. Distributed intelligence of multi-agent systems. Part II: Collective intelligence of social systems. *Problemy upravleniya.* 2023;6:3–21 (in Russ.). <https://doi.org/10.25728/pu.2023.6.1>]
39. Gad A.G. Particle swarm optimization algorithm and its applications: a systematic review. *Arch. Computat. Methods Eng.* 2022;29(5):2531–2561. <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09694-4>
40. Kuliev E.V., Zaporozhets D.Yu., Kravchenko Yu.A., Semenova M.M. Solution of the problem of intellectual data analysis based on bioinspired algorithm. *Izvestiya Yuzhnogo federal'nogo universiteta. Tekhnicheskie nauki = Izvestiya SFedU. Engineering sciences.* 2021;6(223):89–99 (in Russ.). <https://doi.org/10.18522/2311-3103-2021-6-89-99>
41. Dorigo M., Stützle T. Ant colony optimization: overview and recent advances. In book: Gendreau M., Potvin J.Y. (Eds.). *Handbook of Metaheuristics. International Series in Operations Research & Management Science.* Springer; 2019. P. 311–351. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1665-5_8
42. Kureychik V.V., Rodzin S.I. Computational models of evolutionary and swarm bio heuristics (Review). *Informatsionnye tekhnologii = Information Technologies.* 2021;27(1):507–520 (in Russ.). <https://doi.org/10.17587/it.27.507-520>
43. Almufti S.M., Alkurdi A.A.H., Khoursheed E.A. Artificial Bee Colony Algorithm Performances in Solving Constraint-Based Optimization Problem. *Telematique.* 2022;21(1):6785–6799.
44. Lee J., Perkins D. A simulated annealing algorithm with a dual perturbation method for clustering. *Pattern Recogn.* 2021;112:107713. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2020.107713>

Об авторах

Бекетов Сальбек Мустафаевич, аналитик, лаборатория «Цифровое моделирование промышленных систем», ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29). E-mail: salbek.beketov@spbpu.com. ResearcherID KAM-0488-2024, SPIN-код РИНЦ 6717-9810, <https://orcid.org/0009-0009-6448-9486>

Зубкова Дарья Андреевна, младший научный сотрудник, лаборатория «Цифровое моделирование промышленных систем», ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29). E-mail: daria.zubkova@spbpu.com. Scopus Author ID 58045650200, SPIN-код РИНЦ 8130-5458, <https://orcid.org/0000-0003-1106-5080>

Гинцяк Алексей Михайлович, к.т.н., заведующий лабораторией «Цифровое моделирование промышленных систем», ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29). E-mail: aleksei.gintciak@spbpu.com. Scopus Author ID 57203897426, ResearcherID W-8013-2019, SPIN-код РИНЦ 9339-2635, <https://orcid.org/0000-0002-9703-5079>

Бурлуцкая Жанна Владиславовна, младший научный сотрудник, лаборатория «Цифровое моделирование промышленных систем», ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29). E-mail: zhanna.burlutskaya@spbpu.com. Scopus Author ID 57645600200, ResearcherID AGC-6277-2022, SPIN-код РИНЦ 1310-2126, <https://orcid.org/0000-0002-5680-1937>

Редько Сергей Георгиевич, директор Высшей школы проектной деятельности и инноваций в промышленности, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Россия, Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29). E-mail: redko_sg@spbstu.ru. Scopus Author ID 57211475098, SPIN-код РИНЦ 3501-2403, <https://orcid.org/0000-0002-4343-4154>

About the Authors

Salbek M. Beketov, Analyst, Laboratory of Digital Modeling of Industrial Systems, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politekhnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251 Russia). E-mail: salbek.beketov@spbpu.com. ResearcherID KAM-0488-2024, RSCI SPIN-code 6717-9810, <https://orcid.org/0009-0009-6448-9486>

Daria A. Zubkova, Junior Researcher, Laboratory of Digital Modeling of Industrial Systems, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politekhnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251 Russia). E-mail: daria.zubkova@spbpu.com. Scopus Author ID 58045650200, RSCI SPIN-code 8130-5458, <https://orcid.org/0000-0003-1106-5080>

Aleksei M. Gintciak, Cand. Sci. (Eng.), Head of the Laboratory of Digital Modeling of Industrial Systems, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politekhnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251 Russia). E-mail: aleksei.gintciak@spbpu.com. Scopus Author ID 57203897426, ResearcherID W-8013-2019, RSCI SPIN-code 9339-2635, <https://orcid.org/0000-0002-9703-5079>

Zhanna V. Burlutskaya, Junior Researcher, Laboratory of Digital Modeling of Industrial Systems, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politekhnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251 Russia). E-mail: zhanna.burlutskaya@spbpu.com. Scopus Author ID 57645600200, ResearcherID AGC-6277-2022, RSCI SPIN-code 1310-2126, <https://orcid.org/0000-0002-5680-1937>

Sergey G. Redko, Director of the Higher School of Project Management and Innovation in Industry, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29, Politekhnicheskaya ul., St. Petersburg, 195251 Russia). E-mail: redko_sg@spbstu.ru. Scopus Author ID 57211475098, RSCI SPIN-code 3501-2403, <https://orcid.org/0000-0002-4343-4154>