

УДК 531.391

ЭВОЛЮЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА С ГИБКИМИ ВЯЗКОУПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОРБИТЕ

**Е.В. Садовникова,
А.В. Шатина[@]**

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия

[@]Автор для переписки, e-mail: shatina_av@mail.ru

В настоящей работе исследуется вращательное движение искусственного спутника в центральном ньютоновском поле сил. Спутник моделируется симметричным твердым телом с жестко прикрепленными по оси симметрии гибкими вязкоупругими стержнями и со сферическим тензором инерции. Рассмотрена ограниченная постановка задачи, когда центр масс спутника движется по заданной кеплеровской эллиптической орбите. Она является модельной для изучения вращательного движения искусственных спутников Земли со штыревыми радиоантеннами длиной в сотни метров. Для решения поставленной задачи используется метод разделения движений и усреднения для механических систем с бесконечным числом степеней свободы. Получена усредненная система дифференциальных уравнений в переменных Андуайе, описывающая эволюцию вращательного движения спутника. Найдены частные решения эволюционной системы уравнений. Построены фазовые портреты для каждого такого класса решений. Показано, что в процессе диссипативной эволюции, вызванной рассеянием энергии в стержнях, угол между вектором кинетического момента вращательного движения спутника и нормалью к плоскости орбиты уменьшается до нуля. Также обнаружены новые классы стационарных движений, когда ось симметрии спутника составляет произвольный угол с нормалью к плоскости орбиты, или модуль угловой скорости вращения спутника не зависит от орбитальной угловой скорости радиус-вектора его центра масс.

Ключевые слова: спутник, кеплеровская эллиптическая орбита, переменные Андуайе, метод усреднения, диссипативная эволюция движения.

EVOLUTION OF THE ROTATIONAL MOTION OF A SATELLITE WITH FLEXIBLE VISCOELASTIC RODS ON THE ELLIPTIC ORBIT

**E.V. Sadovnikova,
A.V. Shatina[@]**

MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia

[@]Corresponding author e-mail: shatina_av@mail.ru

The rotational motion of an artificial satellite in the central Newtonian force field is investigated. The satellite is modeled as a symmetric solid with rigid viscoelastic rods rigidly attached along the symmetry axis and with a spherical inertia tensor. A limited statement of the problem is considered: the center of mass of the satellite moves along a given Keplerian elliptic orbit. As is known, some artificial Earth satellites (AES) have whip radio antennas for a length of hundreds of meters. The problem considered in this paper is a model for studying the rotational motion of this type of satellites.

To solve this problem, the method of separation of motions and averaging is used for mechanical systems with an infinite number of degrees of freedom. We obtain an averaged system of differential equations in the Andoyer variables, which describes the evolution of the satellite's rotational motion. Partial solutions of the evolutionary system of the equations are found. For each such class of solutions phase portraits are built. It is shown that in the process of dissipative evolution caused by energy dissipation in rods, the angle between the vector of the angular momentum of the satellite's rotational motion and the normal to the orbital plane decreases to zero. Besides, new classes of stationary motions are found: the axis of symmetry of the satellite makes an arbitrary angle with the normal to the orbit plane, or the module of the angular velocity of the satellite rotation does not depend on the orbital angular velocity of the radius vector of its center of mass.

Keywords: satellite, Kepler elliptic orbit, Andoyer variables, averaging method, dissipative evolution of motion.

Целью работы является исследование вращательного движения спутника с жестко прикрепленными по оси симметрии гибкими вязкоупругими стержнями и со сферическим тензором инерции в центральном ньютоновском поле сил на эллиптической орбите. Использован асимптотический метод разделения движений и усреднения для механических систем с бесконечным числом степеней свободы [1]. Ранее указанным методом решали задачу о поступательно-вращательном движении такого спутника в центральном ньютоновском поле сил [2] и изучали вращательное движение динамически симметричного спутника с вязкоупругими стержнями на круговой орбите [3].

Актуальность темы исследования обусловлена необходимостью анализа вращательного движения планет, спутников, космических объектов относительно центра масс, без чего невозможно решение ряда геофизических и динамических задач, связанных с освоением космического пространства. С целью описания вращательного движения используются канонические переменные Андуайе, которые являются переменными «действие–угол» в соответствующей невозмущенной задаче, когда деформации в вязкоупругих стержнях отсутствуют.

1. Постановка задачи. Уравнения движения

Рассмотрим модель спутника, представляющего собой симметричное твердое тело, вдоль оси симметрии которого расположены два гибких вязкоупругих стержня, который движется в центральном ньютоновском гравитационном поле на эллиптической орбите. Введем инерциальную систему координат $OXYZ$ с началом в притягивающем центре, совпадающем с одним из фокусов эллипса. Для описания вращательного движения спутника введем подвижную систему координат $Sx_1x_2x_3$, жестко связанную со спутником (рис.1). Точка S – центр масс спутника при отсутствии деформации стержней, когда стержни

прямолинейны и расположены вдоль оси Cx_3 . При отсутствии деформации в стержнях главные центральные моменты инерции спутника относительно осей Cx_1, Cx_2, Cx_3 равны между собой. Система координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ на рис. 1 – это система осей Кёнига с осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы координат $OXYZ$.

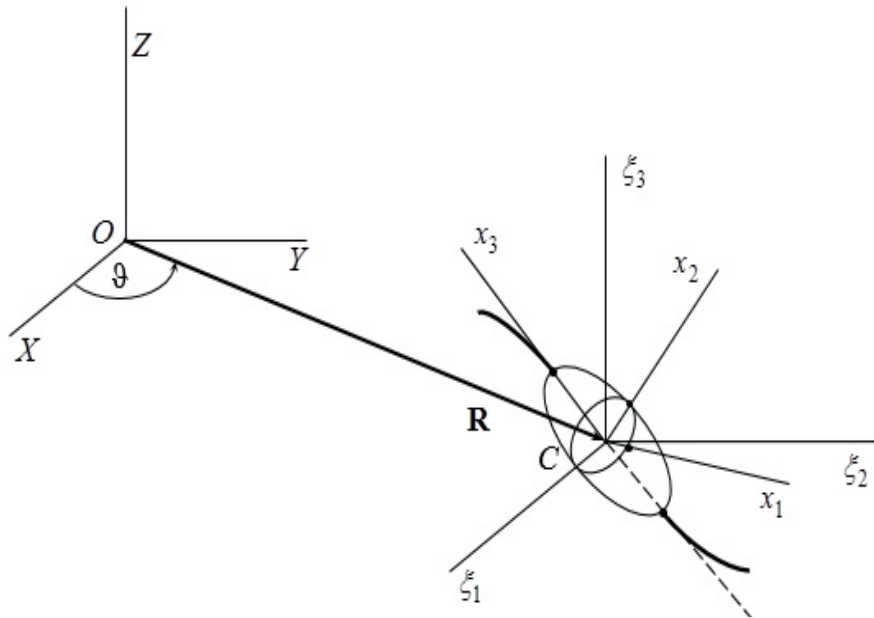


Рис. 1. Системы координат

Радиус-вектор точки стержня в системе координат $Cx_1x_2x_3$, согласно линейной теории изгиба тонких нерастяжимых стержней, имеет вид:

$$\mathbf{r} + \mathbf{u}, \mathbf{u} = u_1(s, t)\mathbf{e}_1 + u_2(s, t)\mathbf{e}_2,$$

$$\mathbf{r} = s\mathbf{e}_3, s \in K = [-b - d \leq s \leq -b] \cup [b \leq s \leq b + d],$$

где $u_i(s, t) (i=1, 2)$ – отклонение сечения стержня с координатой s при изгибе, $\mathbf{e}_i$ – единичный вектор по оси $Cx_i (i=1, 2, 3)$, b и d – постоянные.

Пусть $\mathbf{R}$ – радиус-вектор точки C , а V – область в евклидовом пространстве E^3 , занимаемая твердым телом и двумя недеформированными стержнями. Координаты вектора $\mathbf{R}$ в системе координат $OXYZ$ имеют вид:

$$\mathbf{R} = (R \cos \vartheta, R \sin \vartheta, 0),$$

$$R = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta}, \dot{\vartheta} = \frac{(1+e \cos \vartheta)^2 n}{(1-e^2)^{3/2}}, n = \sqrt{\frac{\gamma}{a^3}}, l = n(t-t_0), \quad (1)$$

где ϑ – истинная аномалия, a – большая полуось орбиты точки C , e – эксцентриситет, n – среднее движение центра масс C по орбите, l – средняя аномалия, $\gamma = GM_0$, G – универсальная гравитационная постоянная, M_0 – масса притягивающего центра, t – текущий

момент времени, t_0 – начальный момент времени. Величины a , e , n являются постоянными, а истинная аномалия ϑ и средняя аномалия – функциями времени. Точкой сверху в (1) обозначена производная по времени.

Радиус-вектор точки M спутника в системе координат $OXYZ$ имеет вид:

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{r} \in V$, $\mathbf{u} \equiv 0$ для точек твердого тела, а Γ – оператор перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к системе осей Кёнига $C\xi_1\xi_2\xi_3$.

Скорость точки M спутника определяется равенством

$$\mathbf{v}_M = \dot{\mathbf{R}}_M = \dot{\mathbf{R}} + \Gamma[\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}) + \dot{\mathbf{u}}], \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость системы координат $Cx_1x_2x_3$, $\boldsymbol{\omega} \times (\cdot) = \Gamma^{-1}\Gamma(\cdot)$.

Кинетическая энергия спутника с учетом (2) представляется функционалом следующего вида:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_V \mathbf{v}_M^2 d\mu = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2} (\hat{J} \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \\ & + \frac{1}{2} \int_K \left\{ [\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2 + \dot{\mathbf{u}}^2 + 2(\Gamma^{-1} \dot{\mathbf{R}}, \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} + \dot{\mathbf{u}}) + 2(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} + \mathbf{u}), \dot{\mathbf{u}}) \right\} \rho ds, \end{aligned} \quad (3)$$

где μ – мера на области V , m – масса спутника, ρ – линейная плотность стержней, которую считаем постоянной, $\hat{J}$ – тензор инерции твердого тела спутника без стержней относительно системы координат $Cx_1x_2x_3$.

Потенциальная энергия гравитационного поля имеет вид:

$$\Pi = -\gamma \int_V \frac{d\mu}{\sqrt{[\mathbf{R} + \Gamma(\mathbf{r} + \mathbf{u})]^2}}. \quad (4)$$

Обозначим через $\mathbf{R}_0$ единичный вектор, направленный по радиус-вектору $\mathbf{R}$. Введем обозначения для компонент вектора $\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0$ в системе координат $Cx_1x_2x_3$: $\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

С учетом того, что $|\mathbf{r} + \mathbf{u}| \ll R$, преобразуем функционал (4), сохраняя квадратичные члены по $(\mathbf{r} + \mathbf{u})/R$ и линейные по $\mathbf{u}/R$ к виду:

$$\Pi = -\frac{\gamma m}{R} + \frac{\gamma}{R^2} \int_K (\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{u}) \rho ds - \frac{3\gamma}{R^3} \int_K (\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{r}) (\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0, \mathbf{u}) \rho ds. \quad (5)$$

Функционалы потенциальной энергии упругих деформаций и диссипативных сил, согласно линейной теории изгиба вязкоупругих стержней, зададим выражениями:

$$E[\mathbf{u}] = \frac{N}{2} \int_K \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} \right)^2 \right] ds ,$$

$$D[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{\chi N}{2} \int_K \left[\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t \partial s^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial t \partial s^2} \right)^2 \right] ds ,$$

где N – изгибная жесткость стержня, χ – коэффициент рассеяния энергии в стержнях при изгибе.

Вращательное движение спутника будем описывать каноническими переменными Андуайе. Построим вектор кинетического момента вращательного движения спутника $\mathbf{G}$ в точке C и перпендикулярную вектору $\mathbf{G}$ плоскость CMN , которая пересекает плоскость $C\xi_1\xi_2$ по прямой CM , а плоскость Cx_1x_2 по прямой CN (рис. 2). Длину вектора $\mathbf{G}$ обозначим через I_2 , а его проекции на оси Cx_3 и $C\xi_3$ соответственно через I_1 и I_3 . Угол между осью $C\xi_1$ и прямой CM обозначим через φ_3 , угол между прямыми CM и CN – через φ_2 , угол между прямой CN и осью Cx_1 – через φ_1 . Угол δ_1 на рис. 2 – это угол, который составляет вектор $\mathbf{G}$ с осью $C\xi_3$, а δ_2 – угол, который составляет вектор $\mathbf{G}$ с осью Cx_3 . Согласно определению величин I_1, I_2, I_3 :

$$\cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{I_1}{I_2}.$$

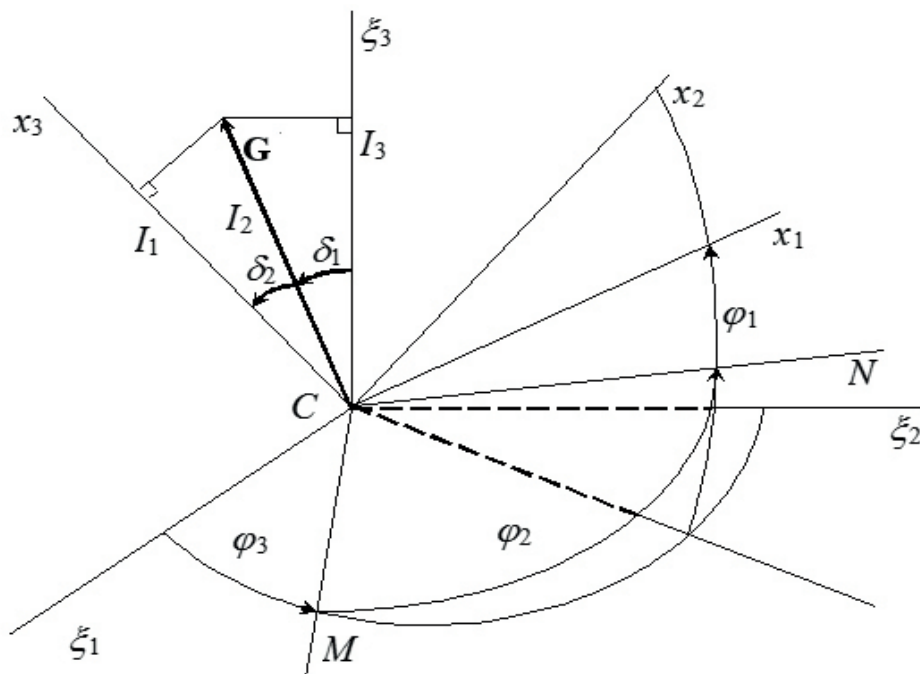


Рис. 2. Переменные Андуайе.

Переменные $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ называются переменными Андуайе [4].

Переход от системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ к системе координат $Cx_1x_2x_3$ в переменных Андуайе осуществляется посредством пяти последовательных поворотов на углы

$\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, \varphi_1$ вокруг осей $C\zeta_3, CM$, вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ и осей CN и Cx_3 соответственно.

Оператор Γ в переменных Андуайе можно представить в виде произведения пяти ортогональных матриц:

$$\Gamma = \Gamma_3(\varphi_3)\Gamma_1(\delta_1)\Gamma_3(\varphi_2)\Gamma_1(\delta_2)\Gamma_3(\varphi_1),$$

где

$$\Gamma_3(\varphi_k) = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k & 0 \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \Gamma_1(\delta_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 \cos \delta_j - \sin \delta_j & & \\ 0 \sin \delta_j & \cos \delta_j & \end{pmatrix}, k = 1, 2, 3, j = 1, 2.$$

Компоненты вектора $\mathbf{G}$ в системе координат $Cx_1x_2x_3$ в переменных Андуайе имеют вид:

$$\mathbf{G} = (\sqrt{I_2^2 - I_1^2} \sin \varphi_1, \sqrt{I_2^2 - I_1^2} \cos \varphi_1, I_1).$$

Функционал Рауса определяется равенством:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^3 I_k \dot{\varphi}_k - T + \Pi + E[\mathbf{u}].$$

В поставленной задаче он имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\mathbf{I}, \boldsymbol{\varphi}, \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{u}, \vartheta] = & \frac{I_2^2}{2A} - \int_K (\mathbf{u} \times \Gamma^{-1} \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{u}}, J_0^{-1} \mathbf{G}) \rho ds + \\ & + \int_K (J_0^{-1} \mathbf{G}, \mathbf{r})(J_0^{-1} \mathbf{G}, \mathbf{u}) \rho ds - \int_K (\Gamma^{-1} \dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{u}}) \rho ds - \\ & - \frac{ma^2 n^2 (1 + 2e \cos \vartheta + e^2)}{2(1 - e^2)} - \frac{\gamma m}{R} + \frac{\gamma}{R^2} \int_K (\Gamma^{-1} \mathbf{R}_0, \mathbf{u}) \rho ds - \\ & - \frac{3\gamma}{R^3} \int_K (\Gamma^{-1} \mathbf{R}_0, \mathbf{r})(\Gamma^{-1} \mathbf{R}_0, \mathbf{u}) \rho ds + \mathbf{R}^* + E[\mathbf{u}] \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, $\mathbf{r} = s\mathbf{e}_3 = (0, 0, s)$, $J_0^{-1} \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$,

$$G_1 = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} \sin \varphi_1, G_2 = \frac{\sqrt{I_2^2 - I_1^2}}{A} \cos \varphi_1, G_3 = \frac{I_1}{A},$$

A – главный центральный момент инерции спутника с недеформированными стержнями относительно оси Cx_i ($i = 1, 2, 3$), $J_0 = \text{diag}(A, A, A)$. В $\mathbf{R}^*$ входят члены второго и более высоких порядков по компонентам векторов $\mathbf{u}$ и $\dot{\mathbf{u}}$.

Уравнения движения рассматриваемой механической системы выписываются в форме уравнений Рауса:

$$\dot{I}_k = -\nabla_{\varphi_k} \mathbf{R}, \quad \dot{\varphi}_k = \nabla_{I_k} \mathbf{R}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (6)$$

$$-\frac{d}{dt} \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} \mathbf{R} + \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{R} + \nabla_{\dot{\mathbf{u}}} D = 0. \quad (7)$$

2. Эволюция вращательного движения спутника

Будем считать жесткость N стержней большой. Это означает, что низшая частота собственных колебаний стержня намного больше начальной угловой скорости спутника. Тогда мал безразмерный параметр $\varepsilon_0 = \omega_0^2 d^4 \rho N^{-1}$, где ω_0 – константа, ограничивающая модуль начальной угловой скорости спутника, d – длина стержня, ρ – его линейная плотность. Можно выбрать масштабы основных единиц так, чтобы $\omega_0^2 d^4 \rho = 1$, тогда $\varepsilon = N^{-1} \ll 1$.

Если $\varepsilon = 0$, то будем полагать $\mathbf{u} = 0$, то есть стержни не деформируются, и данная механическая система движется как твердое тело. Уравнения невозмущенного движения в этом случае выглядят следующим образом:

$$\dot{I}_1 = 0, \quad \dot{I}_2 = 0, \quad \dot{I}_3 = 0, \quad \dot{\varphi}_1 = 0, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2, \quad \dot{\varphi}_3 = 0, \quad \omega_2 = I_2 / A. \quad (8)$$

Из уравнения (7) найдем вектор-функцию $\mathbf{u}$, описывающую вынужденные колебания вязкоупругих стержней под действием гравитационных сил и сил инерции переносного движения. Согласно методу разделения движений [1, 5], это решение строится на невозмущенном движении (8). В данном случае оно представляется в виде:

$$\mathbf{u} = \varepsilon \Psi(s) [\mathbf{e}_1 (f_1 - \chi \dot{f}_1) + \mathbf{e}_2 (f_2 - \chi \dot{f}_2)], \quad (9)$$

$\Psi(s)$ – нечетная функция аргумента s , имеющая вид многочлена пятой степени [2, 3], $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – орты осей Cx_1, Cx_2 ,

$$f_1 = \rho \left\{ -G_1 G_3 + \frac{3\gamma_1 \gamma_3 (1 + e \cos \vartheta)^3 n^2}{(1 - e^2)^3} \right\},$$

$$f_2 = \rho \left\{ -G_2 G_3 + \frac{3\gamma_2 \gamma_3 (1 + e \cos \vartheta)^3 n^2}{(1 - e^2)^3} \right\},$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \Gamma_3(-\varphi_1)\Gamma_1(-\delta_2)\Gamma_3(-\varphi_2)\Gamma_1(-\delta_1)\Gamma_3(\vartheta - \varphi_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – координаты вектора $\Gamma^{-1}\mathbf{R}_0$ в системе координат $Sx_1x_2x_3$. Точкой сверху в (9) обозначена производная по времени, которая вычисляется в силу невозмущенной системы уравнений (8).

Вектор-функцию (9) далее подставляем в правые части системы уравнений (6). В результате получается возмущенная система уравнений движения спутника в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений седьмого порядка относительно переменных Андуайе $I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и истинной аномалии ϑ . Полученная система имеет стандартный вид для проведения процедуры усреднения по «быстрым» угловым переменным φ_2, l , где l – средняя аномалия, линейно зависящая от времени согласно (1).

Средняя аномалия l связана с истинной аномалией ϑ посредством соотношений, указанных в [6, 7]:

$$l = w - e \sin w, \quad (10)$$

$$\cos w = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}, \quad (11)$$

где w – эксцентрическая аномалия, а уравнение (10) называется уравнением Кеплера.

Операция усреднения состоит в вычислении интеграла

$$\langle (\cdot) \rangle_{\varphi_2, l} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) d\varphi_2 dl.$$

Так как зависимость от переменной l в правых частях возмущенной системы уравнений осуществляется неявно через истинную аномалию ϑ по формулам (10), (11) и

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial l} = \frac{(1 + e \cos \vartheta)^2}{(1 - e^2)^{3/2}},$$

то

$$\langle (\cdot) \rangle_{\varphi_2, l} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \vartheta)^2} d\varphi_2 d\vartheta.$$

Усреднение по быстрым угловым переменным φ_2, l приводит к системе дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{I}_k &= \varepsilon \chi d_1 \rho^2 n^5 H_k(I_1, I_2, I_3, \varphi_3), \quad k = 1, 2, 3, \\ \dot{\varphi}_3 &= \varepsilon d_1 \rho^2 n^4 [\Psi_{31}(I_1, I_2, I_3) + e^2 \Psi_{32}(I_1, I_2, I_3, \varphi_3)] + \varepsilon \chi d_1 \rho^2 n^5 \Psi_{33}(I_1, I_2, I_3, \varphi_3), \\ d_1 &= \int_K s \Psi(s) ds > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку $\chi n \ll 1$, $e^2 \ll 1$, то переменную φ_3 можно считать быстрой угловой переменной. Поэтому дополнительно можно провести усреднение системы уравнений (12) по угловой переменной φ_3 . Таким образом, усреднение правых частей возмущенной системы уравнений движения сводится к вычислению интеграла:

$$\langle (\cdot) \rangle_{\varphi_2, \varphi_3, l} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cdot) \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e \cos \vartheta)^2} d\varphi_2 d\varphi_3 d\vartheta. \quad (13)$$

В результате усреднения правых частей возмущенной системы уравнений согласно (13) получаем систему дифференциальных уравнений 3-го порядка, описывающую изменения «медленных» переменных Андуайе I_1, I_2, I_3 :

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 = & \frac{9\varepsilon\chi\rho^2 d_1 n^4}{32(1-e^2)^6} \{4nF_2(e)[2 \cos 2\delta_2 \cos \delta_2 \sin 2\delta_1 \sin \delta_1 + \\ & + \sin 2\delta_2 \cos \delta_1 \sin \delta_2 (1 + \cos^2 \delta_1)] - \\ & - \omega_2 F_1(e)(1-e^2)^{3/2} [4 \cos 2\delta_2 \cos \delta_2 \sin^2 \delta_1 (1 + 3 \cos^2 \delta_1) + \\ & + \sin 2\delta_2 \sin \delta_2 (3 + 2 \cos^2 \delta_1 + 3 \cos^4 \delta_1)]\}, \\ \dot{I}_2 = & \frac{9\varepsilon\chi\rho^2 d_1 n^4}{16(1-e^2)^6} \{4nF_2(e) \cos \delta_1 [\sin^2 \delta_1 (\cos^2 \delta_2 + \cos^2 2\delta_2) + \\ & + \sin^2 \delta_2 (1 + \cos^2 \delta_1) (1 + \cos^2 \delta_2)] - \\ & - \omega_2 F_1(e)(1-e^2)^{3/2} [\sin^2 \delta_1 (1 + 3 \cos^2 \delta_1) (\cos^2 \delta_2 + \cos^2 2\delta_2) + \\ & + \sin^2 \delta_2 (1 + \cos^2 \delta_2) (3 + 2 \cos^2 \delta_1 + 3 \cos^4 \delta_1)]\}, \\ \dot{I}_3 = & \frac{9\varepsilon\chi\rho^2 d_1 n^4}{16(1-e^2)^6} \left\{ nF_2(e) \left[\sin^2 2\delta_1 \cos^2 \delta_2 + \sin^2 \delta_2 (1 + \cos^2 \delta_1)^2 + \right. \right. \\ & + 4(\sin^2 \delta_1 \cos^2 \delta_2 + \cos^2 \delta_1 \sin^2 \delta_2) + \\ & + \sin^2 \delta_2 \cos^2 \delta_2 (18 \sin^4 \delta_1 + 1 + 6 \cos^2 \delta_1 + \cos^4 \delta_1) + \\ & + 4 \cos^2 2\delta_2 \sin^2 \delta_1 (1 + \cos^2 \delta_1) \Big] - 4\omega_2 F_1(e)(1-e^2)^{3/2} \cos \delta_1 \times \\ & \times \left[\sin^2 \delta_1 (\cos^2 \delta_2 + \cos^2 2\delta_2) + \sin^2 \delta_2 (1 + \cos^2 \delta_1) (1 + \cos^2 \delta_2) \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$F_1(e) = 1 + 3e^2 + \frac{3}{8}e^4, \quad F_2(e) = 1 + \frac{15}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^4 + \frac{5}{16}e^6.$$

На следующем шаге, принимая во внимание (14), перейдем к безразмерным переменным и безразмерному времени. В качестве безразмерных переменных возьмем

$$x_1 = \cos \delta_1, \quad x_2 = \cos \delta_2, \quad x_3 = \frac{\omega_2}{n}.$$

Теперь выполним переход к безразмерному времени $\tau = t\delta$, где

$$\delta = \frac{9\varepsilon\chi\rho^2 d_1 n^4}{16A}.$$

Обезразмеренная система уравнений движения спутника, описывающая эволюцию вращательного движения, имеет вид:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{(1-x_1^2)}{x_3} \{ \Phi_2(e) [5 + 3x_1^2 + 6x_2^2(1-3x_1^2) - 3x_2^4(1-5x_1^2)] - \\ &\quad - \Phi_1(e)x_3x_1 [4 - 9x_2^2(1-x_1^2) + x_2^4(11-15x_1^2)] \}, \\ x'_2 &= \frac{x_2}{x_3} \{ 4\Phi_2(e)x_1 [3(x_1^2-1) + 2x_2^2(3-4x_1^2) + x_2^4(5x_1^2-3)] - \\ &\quad - \Phi_1(e)x_3 [3(3x_1^4-2x_1^2-1) + 4x_2^2(1+3x_1^2-6x_1^4) + x_2^4(15x_1^4-6x_1^2-1)] \}, \\ x'_3 &= 4\Phi_2(e)x_1 [2 + 3x_2^2(x_1^2-1) + x_2^4(3-5x_1^2)] - \\ &\quad - \Phi_1(e)x_3 [4(1+x_1^2) + 3x_2^2(3x_1^4-2x_1^2-1) + x_2^4(1+6x_1^2-15x_1^4)] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\Phi_1(e) = \frac{F_1(e)}{(1-e^2)^{9/2}}, \quad \Phi_2(e) = \frac{F_2(e)}{(1-e^2)^6}.$$

3. Частные решения эволюционной системы уравнений.

Фазовые портреты

Можно выделить следующие частные решения полученной системы уравнений (15):

- 1) $x_2 \equiv 0$ – ось симметрии спутника ортогональна вектору кинетического момента $\mathbf{G}$;
- 2) $x_1 \equiv 1$ – вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ ортогонален плоскости орбиты, вращение спутника прямое;
- 3) $x_1 \equiv -1$ – вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ ортогонален плоскости орбиты, вращение спутника обратное;
- 4) $x_2 \equiv 1$ или $x_2 \equiv -1$ – ось симметрии Sx_3 спутника направлена по вектору $\mathbf{G}$, т.е. ось

симметрии спутника совпадает с точностью до бесконечно малых более высокого порядка с его осью вращения.

В первом случае первое и третье уравнения системы (15) примут вид:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{(1-x_1^2)}{x_3} \{ (5+3x_1^2)\Phi_2(e) - 4x_1x_3\Phi_1(e) \}, \\ x_3' &= 8x_1\Phi_2(e) - 4x_3(1+x_1^2)\Phi_1(e) \end{aligned} \quad (16)$$

На рис. 3 представлен фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (16). Пунктирными кривыми изображены особые точки этой системы.

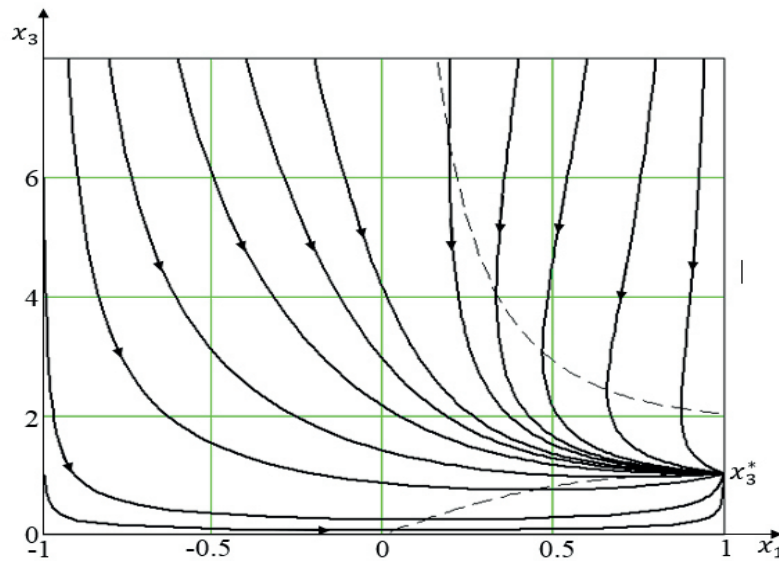


Рис. 3. Фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (16).

Интегральные кривые стягиваются в точку $(1, x_3^*)$, где $x_3^* = \Phi_2(e)/\Phi_1(e)$ (отношение функций эксцентриситета). Это означает, что движение спутника стремится к прямому вращению вокруг нормали к плоскости орбиты. Стержни лежат в плоскости орбиты, а угловая скорость собственного вращения равна орбитальной, умноженной на x_3^* . В случае круговой орбиты угловая скорость собственного вращения будет совпадать с орбитальной.

Отрицательные значения x_1 соответствуют обратным вращениям спутника. Как видно из фазового портрета (рис. 3), вращение спутника из обратного переходит в прямое с последующим переходом в асимптотически устойчивое положение равновесия $x_1 = 1, x_3 = x_3^*$.

Второе частное решение соответствует значению $x_1 \equiv 1$. В этом случае вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ ортогонален плоскости орбиты. Вращение спутника прямое. Угол δ_1 равен нулю. Тогда второе и третье уравнения системы (15) примут вид:

$$\begin{aligned} x_2' &= -\frac{8x_2^3(1-x_2^2)}{x_3} \{ \Phi_2(e) - x_3\Phi_1(e) \}, \\ x_3' &= 8(1-x_2^4) \{ \Phi_2(e) - x_3\Phi_1(e) \}. \end{aligned} \quad (17)$$

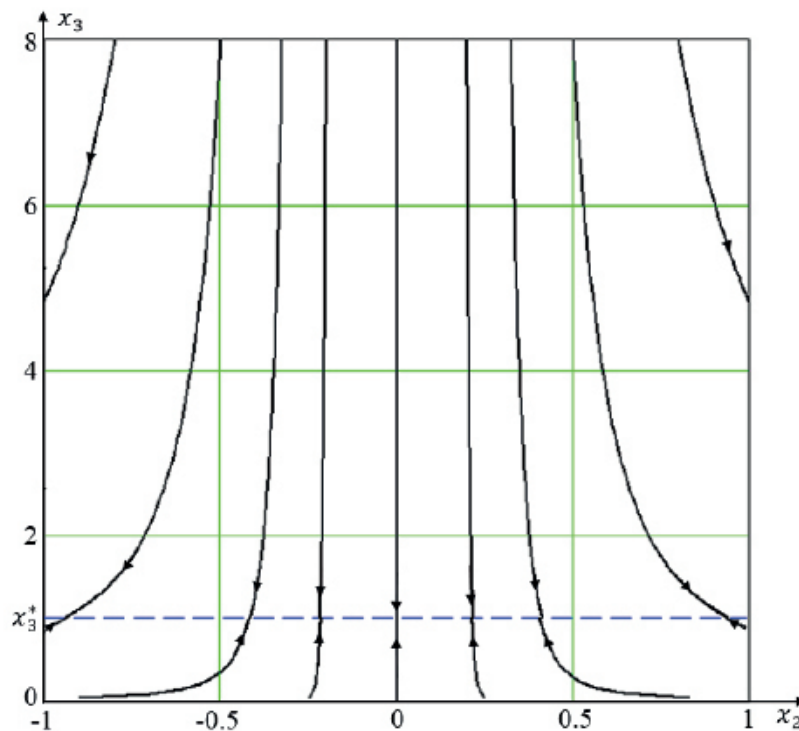


Рис. 4. Фазовый портрет системы уравнений (17).

На рис. 4 изображен фазовый портрет системы (17). Здесь мы имеем несколько множеств, состоящих из стационарных точек:

- а) точки отрезка $x_2 = s, x_3 = x_3^* (s \in [-1; 1])$;
- б) луч $x_2 = -1, x_3 = s (s \geq 0)$;
- в) луч $x_2 = 1, x_3 = s (s \geq 0)$.

В случае а) соответствующие стационарные решения асимптотически устойчивы при $s \in (-1; 1)$, а в случаях б) и в) – при $s > x_3^*$. Случай а) соответствует вращению спутника, при котором модуль вектора угловой скорости равен среднему движению центра масс спутника по орбите, умноженному на x_3^* . При этом ось Cx_3 образует некоторый угол с нормалью к плоскости орбиты, отличный от 0 и π , который определяется начальными значениями задачи.

Третье частное решение соответствует значению $x_1 \equiv -1$. Вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ ортогонален плоскости орбиты. Вращение спутника обратное. Тогда второе и третье уравнения системы (15) запишутся так:

$$\begin{aligned} x_2' &= \frac{8x_2^3(1-x_2^2)}{x_3} \{\Phi_2(e) + x_3\Phi_1(e)\}, \\ x_3' &= -8(1-x_2^4) \{\Phi_2(e) + x_3\Phi_1(e)\}. \end{aligned} \quad (18)$$

На рис. 5 изображен фазовый портрет системы дифференциальных уравнений (18). Модуль угловой скорости собственного вращения монотонно убывает, а ось симметрии спутника, по которой направлены стержни, стремится совпасть с нормалью к плоскости

орбиты. Стационарное значение модуля вектора угловой скорости определяется начальными значениями системы (18).

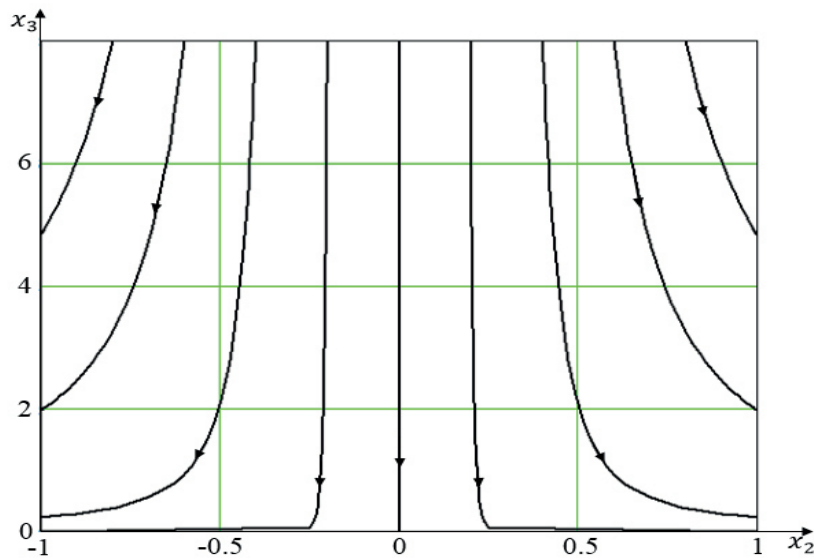


Рис. 5. Фазовый портрет системы уравнений (18).

Четвертое частное решение соответствует значению $x_2 \equiv 1$ или $x_2 \equiv -1$. Это означает, что ось симметрии Sx_3 спутника сонаправлена с вектором кинетического момента $\mathbf{G}$, т.е. с точностью до членов более высокого порядка малости ось симметрии спутника, по которой направлены стержни, совпадает с его осью вращения. Угол δ_1 в данном случае равен нулю или π . Тогда первое и третье уравнения системы (15) примут вид:

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{2(1-x_1^2)}{x_3} \{4\Phi_2(e) - 3x_1x_3(1-x_1^2)\Phi_1(e)\}, \\ x_3' &= 2(1-x_1^2) \{4\Phi_2(e)x_1 - x_3(1+3x_1^2)\Phi_1(e)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

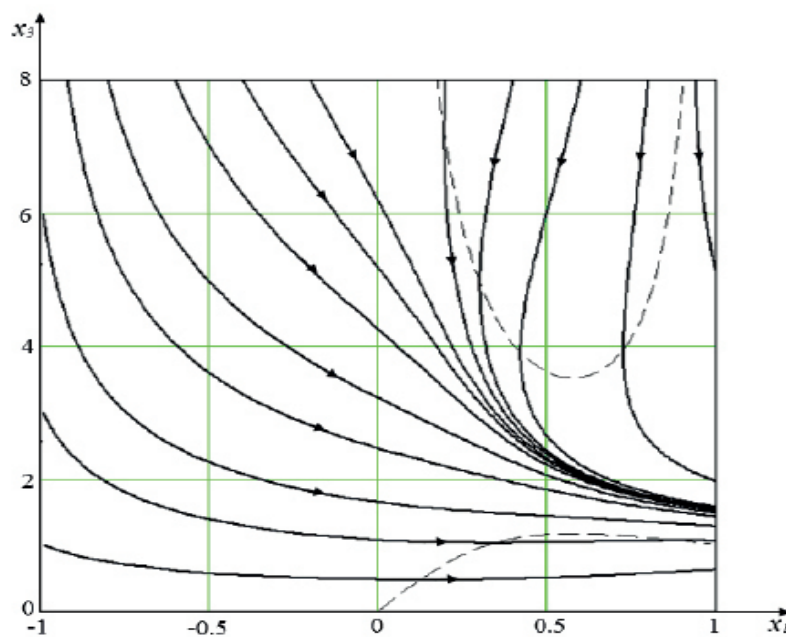


Рис. 6. Фазовый портрет системы уравнений (19).

На рис. 6 изображен фазовый портрет системы уравнений (19). Движение по фазовым траекториям устремляется к точкам прямой $x_1 = 1$. Следовательно, ось симметрии спутника, по которой направлены стержни, совпадающая с осью вращения, стремится совпасть с нормалью к плоскости орбиты. Движение спутника стремится к прямому вращению вокруг нормали к плоскости орбиты. При этом модуль угловой скорости вращения спутника определяется начальными условиями задачи.

Эффект стабилизации спутника в окрестности вращений вокруг нормали к плоскости орбиты, совпадающей с осью наибольшего его момента инерции, был установлен ранее для ряда других моделей спутников с внутренней диссипацией [1, 8–14].

Заключение

Асимптотическим методом разделения движений и усреднения получена эволюционная система обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка. Она описывает изменение модуля вектора угловой скорости спутника и углов, которые вектор кинетического момента вращательного движения спутника составляет с нормалью к плоскости орбиты и осью симметрии спутника в нерезонансном случае. Найдены классы движений спутника, моделируемого симметричным твердым телом с жестко прикрепленными по оси симметрии вязкоупругими стержнями и сферическим центральным тензором инерции при отсутствии деформаций в стержнях. Построены фазовые портреты, описывающие эволюцию движения спутника.

Литература:

1. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч. 1, 2. М.: Изд-во мех.-мат. факультета МГУ, 1997. Ч. 1. – 216 с. Ч. 2. – 160 с.
2. Вильке В.Г., Шатина А.В. Эволюция движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями в центральном ньютоновском поле сил // Космические исследования. 1999. Т. 37. Вып.3. С. 289–295.
3. Шатина А.В. Эволюция вращательного движения симметричного спутника с гибкими вязкоупругими стержнями // Космические исследования. 2002. Т. 40. № 2. С. 178–192.
4. Вильке В.Г. Механика систем материальных точек и твердых тел. М.: Физматлит, 2013. 268 с.
5. Вильке В.Г. Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1983. Вып. 5. С. 54–59.
6. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1975. 800 с.
7. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.
8. Черноушко Ф.Л. О движении твердого тела, содержащего сферический демпфер // ПМТФ. 1968. № 1. С. 73–79.
9. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
10. Маркеев А.П. Об одном частном случае движения динамически симметричного упруговязкого тела в центральном ньютоновском гравитационном поле // Космические

исследования. 1990. Т. 28. Вып. 5. С. 643–650.

11. Сидоренко В.В. Эволюция вращательного движения планеты с жидким ядром // *Астроном. вестник*. 1993. Т. 27. № 2. С. 119–127.

12. Досаев М.З., Самсонов В.А. Об устойчивости вращения тяжелого тела с вязким наполнителем // *Прикл. математика и механика*. 2002. Т. 66. Вып. 3. С. 427–433.

13. Амелькин Н.И. Об асимптотических свойствах движений спутников в центральном поле, обусловленных внутренней диссипацией // *Прикл. математика и механика*. 2011. Т. 75. № 2. С. 204–223.

14. Адуенко А.А., Амелькин Н.И. Асимптотические свойства движений тяжелого волчка с внутренней диссипацией // *Прикл. математика и механика*. 2014. Т. 78. № 1. С. 1–16.

References:

1. Wilke V.G. Analytical mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom. Parts 1, 2. Moscow: Publ. of the Faculty of Mechanics and Mathematics of the Moscow State University, 1997. Part 1. – 216 p. Part 2. – 160 p. (in Russ.)

2. Wilke V.G., Shatina A.V. Evolution of the motion of a symmetric satellite with flexible viscoelastic rods in the central Newtonian force field // *Kosmicheskiye issledovaniya (Cosmic Investigations)*. 1999. V. 37. Iss. 3. P. 289–295. (in Russ.)

3. Shatina A.V. Evolution of the rotational motion of a symmetric satellite with flexible viscoelastic rods // *Kosmicheskiye issledovaniya (Cosmic Investigations)*. 2002. V. 40. Iss. 2. P. 178–192. (in Russ.)

4. Wilke V.G. Mechanics of systems of material points and rigid bodies. Moscow: Fizmatlit Publ., 2013. 268 p. (in Russ.)

5. Wilke V.G. Separation of motions and the method of averaging in the mechanics of systems with an infinite number of degrees of freedom // *Vestnik MGU. Ser. 1. Matematika, mekhanika (Bulletin of MSU. Series 1. Mathematics, Mechanics)*. 1983. Iss. 5. P. 54–59. (in Russ.)

6. Duboshin G.N. Celestial Mechanics. Main tasks and methods. Moscow: Nauka Publ., 1975. 800 p. (in Russ.)

7. Murray C.D., Dermott S.F. Solar System Dynamics. Cambridge University Press, 1999. 606 p.

Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М.: Физматлит, 2010. 588 с.

8. Chernous'ko F.L. On the motion of a rigid body containing a spherical damper // *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika (Applied Mechanics and Technical Physics)*. 1968. № 1. P. 73–79. (in Russ.)

9. Beletsky V.V. The motion of the satellite relative to the center of mass in the gravitational field. Moscow: MSU Publishing House, 1975. 308 p. (in Russ.)

10. Markeev A.P. On a particular case of motion of a dynamically symmetric elastic-viscous body in a central Newtonian gravitational field // *Kosmicheskiye issledovaniya (Cosmic Investigations)*. 1990. V. 28. Iss. 5. P. 643–650. (in Russ.)

11. Sidorenko V.V. Evolution of rotational motion of a planet with a liquid core // *Astronomicheskiy vestnik. (Astronomical Herald)*. 1993. V. 27. № 2. P. 119–127. (in Russ.)

12. Dosayev M.Z., Samsonov V.A. On the stability of rotation of a heavy body with a viscous filler // *Prikladnaya matematika i mekhanika (Applied Mathematics and Mechanics)*.

2002. V. 66. № 3. P. 427–433. (in Russ.)

13. Amelkin N.I. On the asymptotic properties of the motions of satellites in the central field due to internal dissipation // *Prikladnaya matematika i mekhanika* (Applied Mathematics and Mechanics). 2011. V. 75. № 2. P. 204–223. (in Russ.)

14. Aduenko A.A., Amelkin N.I. Asymptotic properties of motions of a heavy top with internal dissipation // *Prikladnaya matematika i mekhanika* (Applied Mathematics and Mechanics). 2014. V. 78. № 1. P. 1–16. (in Russ.)

Об авторах:

Садовникова Екатерина Владимировна, магистрант, Институт кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Шатина Альбина Викторовна, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики Института кибернетики ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

About the authors:

Ekaterina V. Sadovnikova, Graduate Student, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

Albina V. Shatina, D.Sc. (Phys.-Math.), Associate Professor, Professor of the Chair of Higher Mathematics, Institute of Cybernetics, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).