

УДК 621.37+519.651

**ЛОКАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ
В ЗАДАЧАХ ЭВРИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА
ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ**

**В.Н. Исаков[@],
П.И. Тимошенко**

*МИРЭА – Российский технологический университет, Москва 119454, Россия
[@]Автор для переписки, e-mail: isakov@mirea.ru*

Статья носит обзорный характер с элементами обобщения, но вместе с тем включает и материалы, доведенные до уровня непосредственной практической реализации. Рассмотрены подходы к эвристическому и функциональному синтезу цифровых фильтров, основанные на локальной интерполяции и аппроксимации. Идея численного дифференцирования на основе интерполяции не нова, однако глубокая связь между этим подходом и цифровой фильтрацией часто не находит отражения в литературе, ограничиваясь численным дифференцированием на основе конечных разностей. Этот пробел восполнен в настоящей работе. Получены цифровые дифференциаторы на основе локальной полиномиальной интерполяции, цифровые интеграторы на основе локальной полиномиальной и сплайновой интерполяции, а также цифровые фильтры с П-образной амплитудно-частотной характеристикой на основе полиномиальной МНК-аппроксимации. Полученные результаты могут быть использованы на практике согласно их функциональному предназначению с учётом приводимых рекомендаций. Рассмотрены подходы к численному интегрированию, основанные на эффективных методах интерполяции. В работе приведено описание МНК-фильтров, получаемых при степени аппроксимирующего многочлена 0–8, исследованы их частотные свойства. Приведены сведения, достаточные для получения на их основе цифровых фильтров с П-образной амплитудно-частотной характеристикой без пульсаций в полосе пропускания. Область применения фильтров, таким образом, расширена за рамки МНК-сглаживания.

Ключевые слова: локальная интерполяция, сглаживающая аппроксимация, численное дифференцирование, численное интегрирование, цифровой фильтр, метод наименьших квадратов, фильтр Савицкого-Голея.

**LOCAL INTERPOLATION AND APPROXIMATION
IN TASKS OF HEURISTIC SYNTHESIS OF DIGITAL FILTER**

**V.N. Isakov[@],
P.I. Timoshenko**

*MIREA – Russian Technological University, Moscow 119454, Russia
[@]Corresponding author e-mail: isakov@mirea.ru*

The article has an overview character with elements of generalization, but at the same time it includes information brought to the level of immediate practical implementation. Approaches to heuristic and functional synthesis of digital filters based on local interpolation and approximation are considered. Digital differentiators based on local polynomial interpolation, digital integrators based on local polynomial and spline interpolation and digital filters with a U-shaped amplitude-frequency characteristic based on polynomial OLS approximation are obtained. The obtained results can be used in practice according to their functional purpose, taking into account the recommendations mentioned.

The idea of numerical differentiation based on interpolation is not new, but the deep connection between this approach and digital filtering is not often reflected in literature due to the fact that this concept is limited to numerical differentiation based on finite differences. The gap is filled in this work.

Numerical integration is usually considered on the basis of stepwise or piecewise linear or piecewise parabolic interpolation (method of rectangles, trapezoids, Simpson). However, regardless of the choice of the interpolation method, the digital integrator has a certain generalized structure, and approaches to numerical integration can be based on more effective methods of interpolation, which is shown in the article.

The OLS filters (Savitzky-Golay) are described in the literature. However, the steps for their practical implementation are clearly insufficient. Traditionally the general description of filters does not develop further 4th degree of the approximating polynomial and is often limited to the moving average filters. The frequency properties of the filters are also not fully described. In this work the description of the OLS filters obtained at the degree of the approximating polynomial 0-8 was given, their frequency properties were studied, and sufficient information was given to obtain digital filters based on them with a U-shaped amplitude-frequency characteristic without pulsations in the passband. Thus, the field of filters application is extended beyond the OLS smoothing.

Keywords: local interpolation, smoothing approximation, numerical differentiation, numerical integration, digital filter, least squares method, Savitzky-Golay filter.

Введение

При разработке различного рода радиотехнических устройств и систем возникает необходимость применения алгоритмов цифровой обработки сигналов, реализующих ту или иную функциональную процедуру. Наиболее распространенными являются функциональные процедуры дифференцирования, интегрирования, частотного разделения сигналов (фильтрации), экстраполяции, устранение шума из результатов измерения – сглаживание. В том случае, когда указанные процедуры цифровой обработки сигналов являются линейными, они реализуются цифровыми фильтрами.

Нахождение структуры и коэффициентов цифрового фильтра, обладающего заданными характеристиками – это задача синтеза. В общем случае при синтезе цифрового фильтра желаемые характеристики оказываются физически нереализуемыми по тем или иным причинам, и синтез понимается как оптимальный поиск структуры и коэффициентов такого цифрового фильтра, характеристики которого наилучшим образом (по некоторому критерию) приближаются к заданным [1–3]. Однако не исключаются и частные случаи, когда результат синтеза характеризуется заданным функциональным признаком

цифрового фильтра. При этом и сам синтез – эвристический синтез – понимается как получение результата, не являющегося гарантировано точным и оптимальным, но достаточного для ускоренного и упрощенного решения поставленной задачи. Примеры эвристического синтеза цифровых фильтров по функциональному признаку рассматриваются в [4–6].

В представленной статье систематизирован эвристический подход, а получаемые на основе методов локальной интерполяции и аппроксимации наборы фильтров доведены до уровня непосредственной практической реализации. Они могут рассматриваться и в качестве библиотек для выбора предпочтительного в рамках конкретной задачи фильтра. Отдельно следует отметить МНК-фильтры (фильтры Савицкого-Голея) [7–9], к которым приводит задача сглаживания данных методом наименьших квадратов. Предложены эти фильтры довольно давно, но их частотные свойства исследованы недостаточно полно. Зачастую под фильтрами Савицкого-Голея и вовсе понимаются фильтры скользящего среднего – наиболее простой их вид. Математические выражения для импульсных характеристик фильтров Савицкого-Голея получены до четвертой степени аппроксимирующего многочлена [8]. Нами в данной работе получены выражения для импульсных характеристик фильтров до восьмой степени аппроксимирующего многочлена. Показана возможность получения цифровых фильтров с П-образной амплитудно-частотной характеристикой путем каскадирования звеньев МНК-фильтров. С методами интерполяции и сглаживающей аппроксимации, используемыми в работе, можно ознакомиться в [10–15].

1. Цифровые дифференциаторы

Цифровые дифференциаторы осуществляют оценку производной аналогового сигнала по его дискретным значениям. Методика оценивания производной основана на построении интерполирующей функции и последующем ее дифференцировании. Интерполирующая функция на каждом частном интервале $t \in [t_k - 0,5T, t_k + 0,5T]$, $k \in Z$ описывается выражением:

$$\psi(t) = \sum_{m=-M}^M x[k+m] \varphi_0(t-t_{k+m}),$$

где $\{x[n]\}$ – обрабатываемый сигнал, M – порядок интерполяции, $t_n = nT$, $n \in Z$ – моменты дискретизации, T – период дискретизации, $\varphi_0(t)$ – порождающая функция интерполяционного базиса.

В случае локальной полиномиальной интерполяции порождающая функция интерполяционного базиса имеет вид:

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^M \prod_{\substack{n=-M+i, \\ n \neq 0}}^{M+i} \left(1 - \frac{|t|}{nT}\right) \text{rect}\left(\frac{|t|-iT}{T}\right). \quad (1)$$

Приближенный расчет отсчета l -й производной сигнала $x^{(l)}[k]$ в момент t_k может быть выполнен, как

$$x^{(l)}[k] \approx \psi^{(l)}(t_k) = \sum_{m=-M}^M x[k+m] \varphi_0^{(l)}(t_k - t_{k+m}).$$

Имея в виду, что $t_k - t_{k+m} = kT - (k+m)T = -mT$, обозначим коэффициенты алгоритма оценки l -й производной сигнала как

$$d_m^{(l)} = \varphi_0^{(l)}(-mT), \quad (2)$$

тогда алгоритм оценки производной получим в виде:

$$\psi^{(l)}(t_k) = \sum_{m=-M}^M x[k+m]d_m^{(l)}. \quad (3)$$

Поскольку порождающая функция четно-симметрична, дополнительно заметим, что

$$d_m^{(l)} = -d_{(-m)}^{(l)}; \quad d_0^{(l)} = 0, \quad l - \text{нечётное};$$

$$d_m^{(l)} = d_{(-m)}^{(l)}, \quad l - \text{чётное};$$

$$\sum_{m=-M}^M d_m^{(l)} = 0.$$

Коэффициенты алгоритма дифференцирования удобно определять для единичного периода дискретизации $T = 1$. В таком случае будем обозначать их $\tilde{d}_m^{(l)}$. Так как изменение периода дискретизации приводит к масштабированию порождающей функции, при котором в ее выражении t заменяется на t/T , то

$$d_m^{(l)} = \frac{\tilde{d}_m^{(l)}}{T^l}.$$

Как видно из (3), для получения численной оценки производной на основе регулярной интерполяции порядка l в некоторый момент времени $t_k = kT$ требуются элементы сигнала $x[k-M], \dots, x[k], \dots, x[k+M]$. Однако при последовательной обработке значений сигнала $\{x[n]\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в реальном времени отсчеты $x[k+1], \dots, x[k+M]$ недоступны в момент времени. Поэтому оценка производной сигнала может быть получена только с запаздыванием на M тактов, необходимых для накопления отсутствующих отсчетов (рис. 1).

Сигнал на выходе дифференцирующего фильтра представляет собой отсчеты производной интерполирующей функции $\psi(t)$ с запаздыванием на M тактов:

$$y[n] = \psi^{(l)}((n-M)T).$$

Подставляя производную интерполирующей функции в виде (3), запишем

$$y[n] = \sum_{m=-M}^M d_m^{(l)} x[n-M+m] = \sum_{m=-M}^M d_m^{(l)} x[n-(M-m)].$$

В последней сумме сделаем замену $k = M - m$, тогда получим

$$y[n] = \sum_{m=0}^{2M} a_k x[n-k],$$

где $a_k = d_{M-k}^{(l)}$, $k = 0, \dots, 2M$.

Таким образом, численная оценка производной реализуется нерекурсивным цифровым фильтром порядка $N = 2M$ (рис. 2).

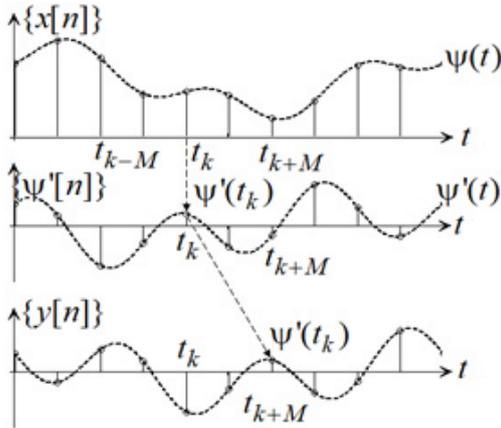


Рис. 1. Сигналы на входе и выходе дифференцирующего цифрового фильтра.

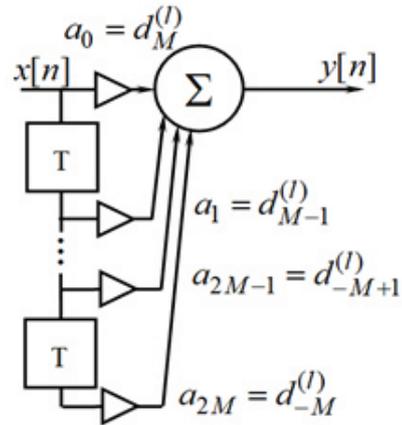


Рис. 2. Структура цифрового дифференциатора.

Коэффициенты дифференциаторов $\tilde{d}_m^{(l)}$, полученные на основе (1) и (2), приведены в табл. 1.

Таблица 1. Коэффициенты и граничные частоты цифровых дифференциаторов

M	l	$K_{\text{идоп}}=0,01,$ $\omega(T)_{\text{гр}},$ рад	$K_{\text{идоп}}=0,001,$ $\omega(T)_{\text{гр}},$ рад	$\tilde{d}_{-3}^{(l)}$	$\tilde{d}_{-2}^{(l)}$	$\tilde{d}_{-1}^{(l)}$	$\tilde{d}_0^{(l)}$	$\tilde{d}_1^{(l)}$	$\tilde{d}_2^{(l)}$	$\tilde{d}_3^{(l)}$
1	1	0.25	0.08			-1/2	0	1/2		
	2	0.35	0.11			1	-2	1		
2	1	0.76	0.44		1/12	-2/3	0	2/3	-1/12	
	2	1.00	0.57		-1/12	4/3	-5/2	4/3	-1/12	
	3	0.20	0.07		-1/2	1	0	-1	1/2	
	4	0.25	0.08		1	-4	6	-4	1	
3	1	1.10	0.74	-1/60	3/20	-3/4	0	3/4	-3/20	1/60
	2	1.40	0.92	1/90	-3/20	3/2	-49/18	3/2	-3/20	1/90
	3	0.66	0.37	1/8	-1	13/8	0	-13/8	1	-1/8
	4	0.78	0.43	-1/6	2	-13/2	28/3	-13/2	2	-1/6
	5	0.18	0.06	-1/2	2	-5/2	0	5/2	-2	1/2
		0.20	0.06	1	-6	15	-20	15	-6	1

Как показатель качества дифференциатора введем относительную ошибку аппроксимации частотной характеристики идеального дифференциатора:

$$K_{\text{н}}^{(l)}(\omega T) = \frac{|(j\omega)^l - H_{\text{д}}^{(l)}(\omega)|}{\omega^l} = \frac{|(j\omega T)^l - T^l H_{\text{д}}^{(l)}(\omega)|}{(\omega T)^l},$$

где $H_{\text{д}}^{(l)}(\omega)$ – частотная характеристика дифференциатора.

Коэффициент искажений $K_n^{(l)}(\omega T)$ удобно рассматривать как функцию нормированной частоты ωT . Граничная частота $(\omega T)_{гр}$ характеризует интервал $[0, (\omega T)_{гр}]$, в пределах которого коэффициент искажений не превышает некоторого порогового значения:

$$K_n^{(l)}(\omega T) \Big|_{\omega T < (\omega T)_{гр}} \leq K_{н.доп}$$

Анализ коэффициента искажений может быть положен в основу выбора метода численного дифференцирования и/или запаса по частоте дискретизации: необходимо добиться, чтобы значение коэффициента искажений не превышало некоторого допустимого уровня в пределах полосы частот, где локализован спектр сигнала $\omega_m T < (\omega T)_{гр}$. Граничные частоты дифференциаторов также приведены в табл. 1.

2. Цифровые интеграторы сигналов

Цифровые интеграторы осуществляют оценку интеграла аналогового сигнала $x(t)$ по его дискретным значениям. Интеграл аналогового сигнала представим в виде:

$$i[n] = \int_0^{t_n} x(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} s[k], \quad (4)$$

где $s[k] = \int_{t_k}^{t_{k+1}} x(t) dt$ – интеграл на интервале дискретизации, $t_n = nT$.

Методика оценивания интеграла основана на построении интерполирующей функции $\psi(t)$ и последующем ее интегрировании. Если используется регулярная интерполяция порядка M , интерполирующая функция на каждом частном интервале $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in Z$ описывается выражением:

$$\psi(t) = \sum_{m=-M}^{M+1} x[k+m] \varphi_0(t-t_{k+m}).$$

Оценка интеграла на интервале $t \in [t_k, t_{k+1}]$, $k \in Z \cup \{0\}$, получаемая по $\psi_k(t)$:

$$s[k] = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \psi_k(t) dt = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \sum_{m=-M}^{M+1} x[k+m] \varphi_0(t-t_{k+m}) dt = \sum_{m=-M}^{M+1} x[k+m] \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varphi_0(t-t_{k+m}) dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену переменной $t' = t - t_{k+m}$, тогда запишем

$$s[k] = \sum_{m=-M}^{M+1} x[k+m] \int_{-t_m}^{-t_{m-1}} \varphi_0(t') dt'.$$

Обозначив

$$\alpha_m = \int_{-t_m}^{-t_{m-1}} \varphi_0(t) dt, \quad m = -M, \dots, M+1, \quad (5)$$

алгоритм оценки интеграла аналогового сигнала на частном интервале дискретизации сможем переписать в виде:

$$s[k] = \sum_{m=-M}^{M+1} \alpha_m x[k+m] \quad (6)$$

Введенные интегралы (5) представляют собой интегралы от соответствующих сегментов порождающей функции (она изображена на рис. 3) и характеризуют «вклад» соответствующих отсчетов сигнала в результат интегрирования на интервале дискретизации.

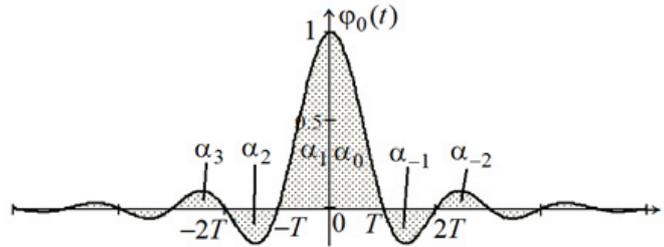


Рис. 3. Интегральные сегменты порождающей функции.

Вернемся к выражению (4) и рассмотрим следующую разность:

$$i[n] - i[n-1] = \sum_{k=0}^{n-1} s[k] - \sum_{k=0}^{n-2} s[k] = s[n-1],$$

или

$$i[n] = s[n-1] + i[n-1].$$

Как видно из (6), для расчета $s[n-1]$ потребуются значения сигнала $x[n-M-1], \dots, x[n+M]$, однако, при последовательной обработке значений сигнала в реальном времени в момент времени t_n элементы $x[n+1], \dots, x[n+M]$ недоступны. Отсюда очевидно, что оценка интеграла может быть выполнена только с запаздыванием на M тактов:

$$y[n] = i[n-M] = s[n-M-1] + i[n-M-1],$$

или, с учетом того, что $i[n-M-1] = y[n-1]$ и выражения (6),

$$y[n] = \sum_{m=-M}^{M+1} \alpha_m x[n-(M-m+1)] + y[n-1].$$

Введем индекс суммирования $l = M - m + 1$, тогда

$$y[n] = \sum_{l=0}^{2M+1} a_l x[n-l] + y[n-1], \quad (7)$$

где:

$$a_l = \alpha_{M-l+1} = \int_{-t_{M-l+1}}^{-t_{M-l}} \Phi_0(t) dt, \quad l = 0, \dots, 2M+1. \quad (8)$$

Полученное разностное уравнение (7) описывает рекурсивный цифровой фильтр (рис. 4), с коэффициентами нерекурсивной части выражения (8). Очевидно, цифровой интегрирующий фильтр является условно устойчивым. Коэффициенты (8), получаемые на основе различных методов интерполяции, рассмотренных в [11–13], суммированы в табл. 2 для единичного периода дискретизации \tilde{a}_l (пересчет для любого периода дискретизации может быть выполнен по формуле $a_l = \tilde{a}_l T$).

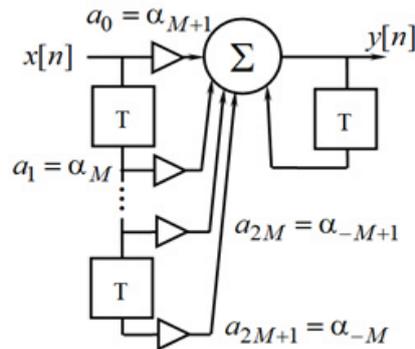


Рис. 4. Схема цифрового интегратора.

Таблица 2. Нормированные коэффициенты некоторых интеграторов

Интерполяция	M	\tilde{a}_0	\tilde{a}_1	\tilde{a}_2	\tilde{a}_3	\tilde{a}_4	\tilde{a}_5
Локальная полиномиальная интерполяция	0	0.5000	0.5000				
	1	-0.0417	0.5417	0.5417	-0.0417		
	2	0.00765	-0.0647	0.55705	0.55705	-0.0647	0.00765
Сплайновая 1 степени гладкости	1	-0.0451	0.5451	0.5451	-0.0451		
	2	0.0124	-0.0762	0.5638	0.5638	-0.0762	0.0124
Сплайновая 2 степени гладкости	1	-0.0446	0.5446	0.5446	-0.0446		
	2	0.0130	-0.0778	0.5648	0.5648	-0.0778	0.0130

3. Интерполирующие цифровые фильтры

Интерполяция сигналов может рассматриваться не только как переход от дискретного сигнала к аналоговому, но и как повышение частоты дискретизации.

Рассмотрим повышение частоты дискретизации сигнала в целое число раз (рис. 5). Исходный дискретный сигнал $\{x[n]\}_{n=0}^{+\infty}$ имеет период дискретизации T . Повышение частоты дискретизации в целое число раз L основано на построении регулярной интерполирующей функции

$$\psi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\varphi_0(t - nT)$$

и последующей ее дискретизации с периодом \tilde{T} , таким, что $T = L\tilde{T}$:

$$\psi(k\tilde{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} x[n]\varphi_0(k\tilde{T} - nT).$$

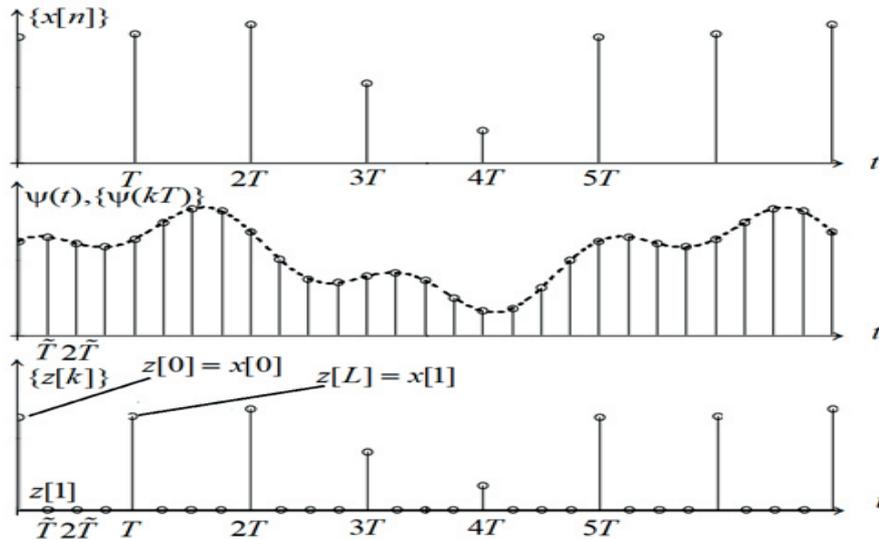


Рис. 5. Повышение частоты дискретизации в целое число раз.

Введем вспомогательный сигнал $\{z[k]\}_{k=0}^{+\infty}$ с периодом дискретизации \tilde{T} , такой, чтобы

$$z[k] = \begin{cases} x[n], k = nL \\ 0, k \neq nL \end{cases}. \text{ Тогда последнее выражение сможем переписать в виде:}$$

$$\psi(k\tilde{T}) = \sum_{n=0}^{+\infty} z[nL]\varphi_0(k\tilde{T} - nL\tilde{T}) = \sum_{m=0}^{+\infty} z[m]\varphi_0(k\tilde{T} - m\tilde{T}) = \sum_{m=0}^{+\infty} z[m]\varphi_0((k-m)\tilde{T}) = z * \varphi_0[k].$$

Таким образом, значения $\psi(k\tilde{T})$ получаются в результате свертки дискретного сигнала $\{z[k]\}_{k=0}^{+\infty}$ и последовательности отсчетов порождающей функции $\{\varphi_0(k\tilde{T})\}_{k=-(M+1)}^{M+1}$, иначе – функция $\psi(k\tilde{T})$ может быть получена на выходе цифрового КИХ-фильтра с импульсной характеристикой $\{\varphi_0(k\tilde{T})\}_{k=-(M+1)}^{M+1}$ при воздействии $\{z[k]\}_{k=0}^{+\infty}$.

Необходимо подчеркнуть, что цифровой фильтр с импульсной характеристикой $\{\varphi_0(k\tilde{T})\}_{k=-(M+1)}^{M+1}$ физически нереализуем, но можно реализовать цифровой фильтр с импульсной характеристикой, получаемой путем сдвига $\{\varphi_0(k\tilde{T})\}_{k=-(M+1)}^{M+1}$ на $M+1$ интервалов дискретизации T (рис. 6):

$$h[k] = \varphi_0(k\tilde{T} - (M+1)T) = \varphi_0((k - (M+1)L)\tilde{T}) \quad (9)$$

Это означает, что интерполированный сигнал может быть получен на выходе цифрового фильтра с задержкой на $M+1$ интервалов дискретизации T :

$$y[k] = \psi(k\tilde{T} - (M+1)T) = \psi((k - (M+1)L)\tilde{T}).$$

Цифровой фильтр с импульсной характеристикой (9) называется интерполирующим. Для повышения частоты дискретизации в целое число L раз сначала формируется вспомогательный дискретный сигнал путем добавления $L-1$ нулевых отсчетов между каждым отсчетом исходного, затем вспомогательный сигнал воздействует на интерполирующий фильтр. Если частоту дискретизации требуется уменьшить в целое число D раз,

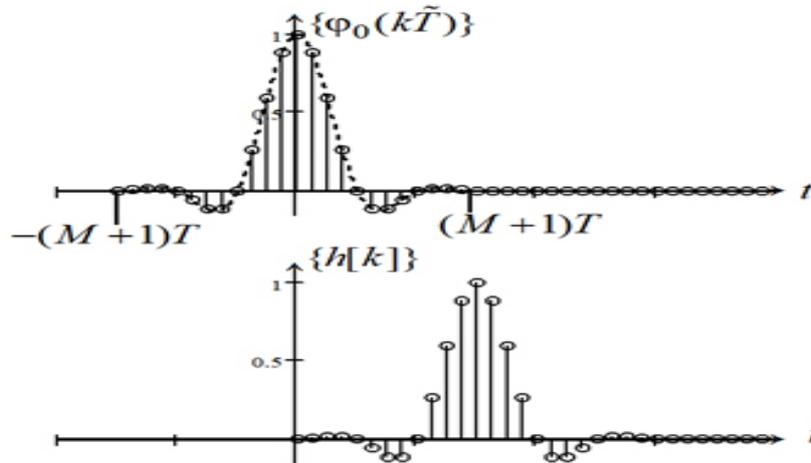


Рис. 6. Дискретизация порождающей функции и импульсная характеристика интерполирующего цифрового фильтра.

применяют прореживание (децимацию). При этом в составе сигнала оставляют только отсчеты, отстоящие друг от друга на D интервалов дискретизации. Если же частоту дискретизации необходимо изменить в нецелое число раз A , используют сначала интерполяцию в L раз, а затем – прореживание в D раз, так, что $A = \frac{L}{D}$.

4. МНК-фильтры (фильтры Савицкого-Голея)

МНК-фильтры реализуют сглаживание сигнала на основе скользящего метода наименьших квадратов. Суть процедуры обработки сигнала отражена на рис.7.

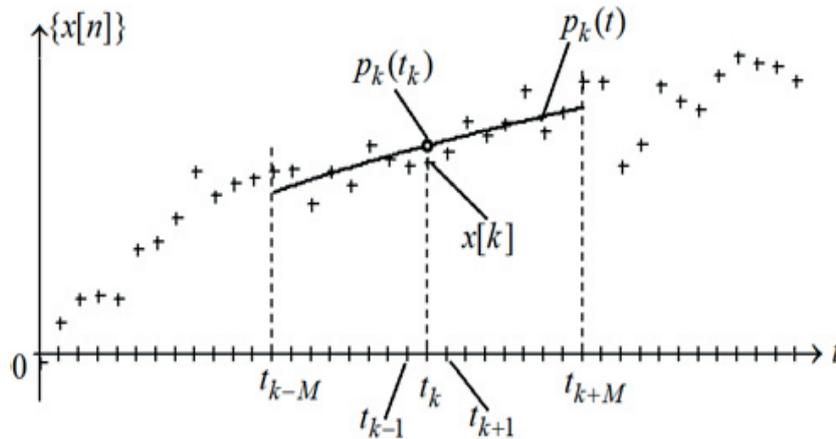


Рис. 7. Принцип скользящей МНК-фильтрации.

Для наглядности элементы обрабатываемого дискретного сигнала $\{x[n]\}$ изображены на рис. 7 крестиками и ассоциируются, например, с результатами каких-либо измерений. Для каждого момента времени $t_k = kT$ строится степенной многочлен:

$$p_k(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_k) + \dots + \alpha_N(t - t_k)^N = \sum_{i=0}^N \alpha_i(t - t_k)^i, \quad (10)$$

Его коэффициенты выбирают таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений этого многочлена от текущего, а также $M \geq (N-1)/2$ предшествующих и M последующих отсчетов была минимальной:

$$\varepsilon_k(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N) = \sum_{n=k-M}^{k+M} (x[n] - p_k(t_n))^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Разумеется, набор коэффициентов $\{\alpha_i\}_{i=0}^{N-1}$ для каждого момента t_k времени индивидуален, однако для уменьшения громоздкости это не учитывается в их обозначении.

Значение выходного сигнала в момент времени t_k полагается равным значению построенного многочлена

$$p_k(t_k) = \alpha_0. \quad (12)$$

Изменение периода дискретизации формально соответствует изменению масштаба времени. Если найден многочлен $p_k(t)$ для единичного периода дискретизации, то для произвольного периода дискретизации необходимо заменить в его выражении t на t/T . Подобная замена, как видно из (10), никак не отражается на коэффициенте α_0 , который нас в конечном итоге и интересует (выражение 12). Поэтому в дальнейшем без ограничения общности можем рассматривать $T = 1$.

В точке минимума (см. выражение 11) ее частные производные должны быть равны нулю:

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \alpha_i} = -2 \sum_{n=k-M}^{k+M} (x[n] - p_k(t_n)) \frac{\partial p_k(t_n)}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 0, \dots, N. \quad (13)$$

Учитывая, что частные производные $\frac{\partial p_k(t_n)}{\partial \alpha_i} = (t_n - t_k)^i$, а также подставляя (10), системе (13) приведем к виду:

$$\sum_{n=k-M}^{k+M} \sum_{m=0}^N \alpha_m (t_n - t_k)^{m+i} = \sum_{n=k-M}^{k+M} x[n] (t_n - t_k)^i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Поменяем теперь слева порядок суммирования и подставим единичный период дискретизации:

$$\sum_{m=0}^N \alpha_m \sum_{n=k-M}^{k+M} (n-k)^{m+i} = \sum_{n=k-M}^{k+M} x[n] (n-k)^i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Выписывая в развернутом виде суммы по n и вводя новую индексацию, получим

$$\sum_{m=0}^N \alpha_m A_{im} = \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n] B_{in}, \quad i = 0, \dots, N, \quad (14)$$

где $A_{im} = \sum_{n=0}^{2M} (n-M)^{m+i}$, $B_{in} = (n-M)^i$.

Решая систему уравнений (14) методом Крамера, найдем:

$\alpha_0 = \frac{\Delta_{\alpha_0}}{\Delta}$, где $\Delta = \|[A_{im}]\|$ – главный определитель системы;

$$\Delta_{\alpha_0} = \begin{vmatrix} \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n]B_{0n} & A_{01} & \dots & A_{0N} \\ \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n]B_{1n} & A_{11} & \dots & A_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n]B_{Nn} & A_{N1} & \dots & A_{NN} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n]B_{0n}\Delta_{00} + \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n]B_{1n}\Delta_{10} + \dots + \sum_{n=0}^{2M} x[k-M+n]B_{Nn}\Delta_{N0},$$

где Δ_{i0} , $i = 0, \dots, N$ – алгебраические дополнения элемента с индексами $i, 0$ в определителе Δ_{α_0} (это определители, получаемые из Δ_{α_0} вычеркиванием нулевого столбца и i -ой строки с учетом шахматного правила знаков).

Объединив суммы в последнем выражении, получим в общем виде решение системы (14):

$$\alpha_0[k] = \sum_{n=0}^{2M} a_n x[k-M+n], \tag{15}$$

где $a_n = \frac{1}{\Delta} (B_{0n}\Delta_{00} + B_{1n}\Delta_{10} + \dots + B_{Nn}\Delta_{N0})$.

При последовательном поступлении значений входного сигнала элементы $x[k+1], \dots, x[k+M]$ в момент времени t_k еще не доступны, поэтому значение выходного сигнала фильтра, равное α_0 , может быть получено только с запаздыванием не менее, чем на M тактов:

$$y[k] = \alpha_0[k-M] = \sum_{n=0}^{2M} a_n x[k-2M+n] = \sum_{n=0}^{2M} a_n x[k-n] \tag{16}$$

Полученный алгоритм (16) соответствует КИХ-фильтру порядка $2M$, коэффициенты которого, при реализации по нерекурсивной схеме, описываются выражением (15) и определяют импульсную характеристику $h[n] = a_n$, $n = 0, \dots, 2M$.

В простейшем частном случае при $N = 0$:

$$a_n = \frac{1}{2M+1}.$$

Обозначив для удобства $L = 2M + 1$ – нечетное количество отсчетов, одновременно обрабатываемых алгоритмом, перепишем (16) в виде:

$$y[k] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} x[k-n].$$

Оно представляет собой разностное уравнение, описывающее нерекursивный цифровой фильтр с единичными коэффициентами (рис. 8а), называемый также фильтром скользящего среднего. Название фильтра подчеркивает, что выходной сигнал фильтра получается путем усреднения (получения среднего арифметического) L элементов входного сигнала.

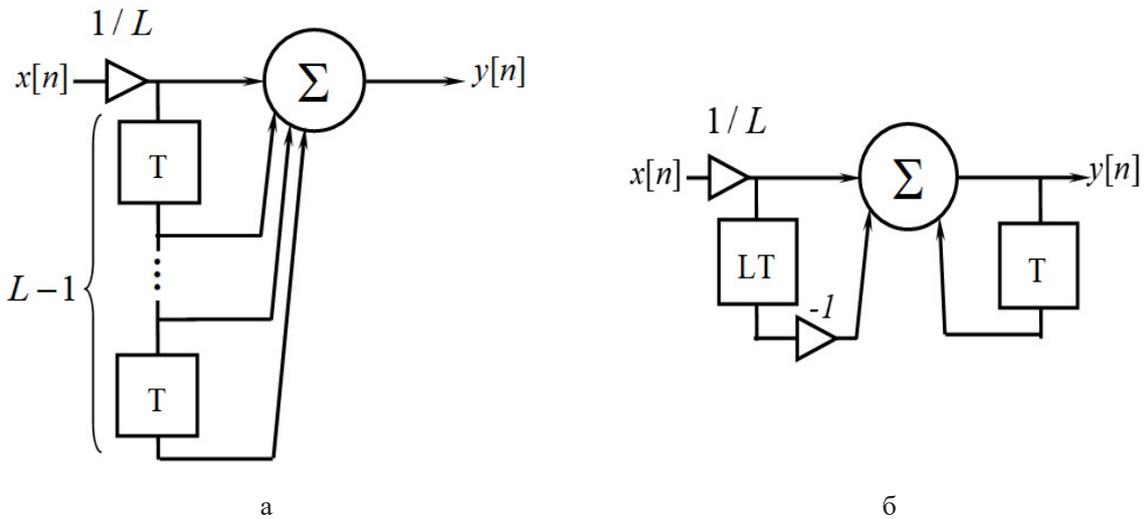


Рис. 8. Схема фильтра скользящего среднего: нерекursiveвного (а) и recursiveвного (б).

Импульсная характеристика фильтра скользящего среднего представляет собой дискретный прямоугольный импульс (рис. 9) из L элементов. Системную функцию найдем как z -изображение импульсной характеристики:

$$H(z) = \frac{1}{L} \frac{1-z^{-L}}{1-z^{-1}}. \tag{17}$$

Системной функции в форме (17) соответствует условно-устойчивая структура цифрового фильтра, показанная на рис. 8б.

Отличительной чертой и важным достоинством цифровых фильтров скользящего среднего является отсутствие умножений, что обуславливает их быстроедействие.

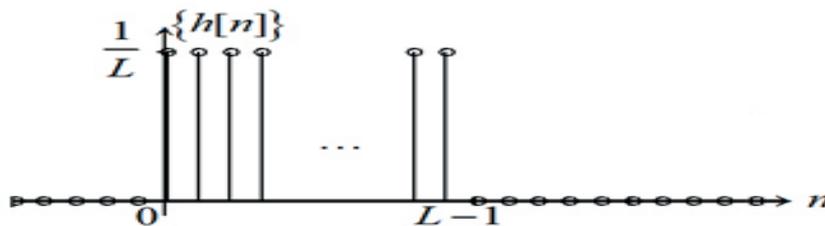


Рис. 9. Импульсная характеристика фильтра скользящего среднего.

Частотная характеристика фильтра имеет вид:

$$H_d(\omega) = H(e^{j\omega T}) = \frac{1 - e^{-jL\omega T}}{L(1 - e^{-j\omega T})} = \frac{1}{L} \frac{\sin(L\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j\frac{L-1}{2}\omega T},$$

амплитудно-частотная характеристика:

$$|H_d(\omega)| = \frac{1}{L} \left| \frac{\sin(L\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right|,$$

фазо-частотная характеристика:

$$\varphi_{H_d}(\omega) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \text{sign} \left(\frac{\sin(L\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} \right) \right) \text{sign}(\omega T) - \frac{L-1}{2} \omega T.$$

Фазо-частотная характеристика линейна и соответствует задержке выходного сигнала относительно входного на M тактов. Амплитудно-частотная характеристика показана на рис. 10 при некоторых значениях M . Зависимость обладает выраженным главным лепестком. Уровень боковых лепестков составляет $-10 \div -15$ дБ и изменяется в зависимости от M .

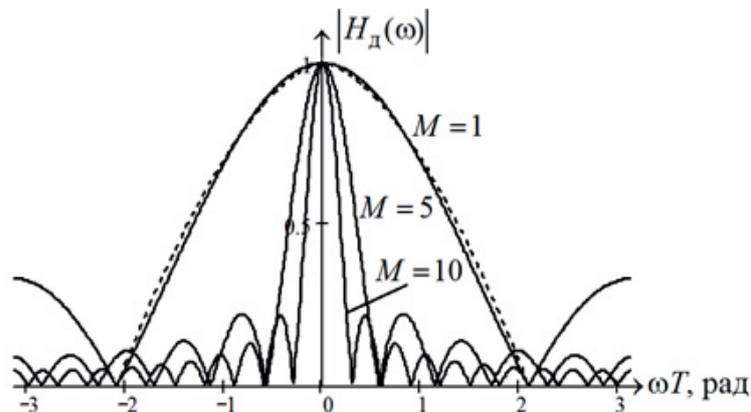


Рис. 10. Амплитудно-частотная характеристика фильтра скользящего среднего при $M = 1, 5, 10$.

Ширина главного лепестка

$$\Delta\omega_0 T = \frac{4\pi}{2M+1}.$$

Сам главный лепесток грубо аппроксимируется следующим выражением:

$$|H_d(\omega)| \approx \left| 1 - \left(\frac{2|\omega T|}{\Delta\omega_0 T} \right)^{1,65} \right|, \quad -\frac{\Delta\omega_0 T}{2} < \omega T < \frac{\Delta\omega_0 T}{2}.$$

График аппроксимирующей функции также показан на рис. 10 пунктиром. Аппроксимация может быть использована для оценки ширины главного лепестка по любому заданному уровню.

При последовательном соединении K звеньев в виде фильтров скользящего среднего результирующая амплитудно-частотная характеристика представляет собой результат перемножения характеристик звеньев $|H_d^K(\omega)|$, и уровень боковых лепестков уменьшается более, чем на 10 дБ на звено. При соединении, например, пяти последовательных звеньев составляет менее -50 дБ. На рис. 11 показаны графики результирующей амплитудно-частотной характеристики при последовательном соединении $K = 5$ звеньев.

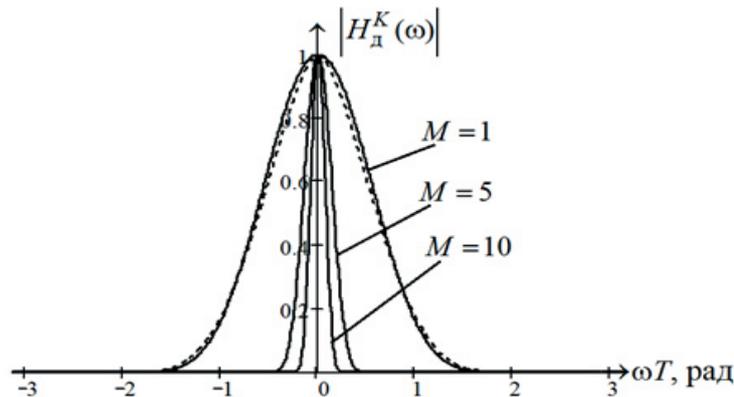


Рис. 11. Результирующая амплитудно-частотная характеристика при последовательном соединении фильтров скользящего среднего.

В общем случае импульсная характеристика МНК-фильтров описывается выражением:

$$h[n] = \begin{cases} \chi_0 + \chi_2(n-M)^2 + \chi_4(n-M)^4 + \dots + \chi_N(n-M)^N, & 0 \leq n \leq 2M \\ 0, & n < 0, n > 2M \end{cases}, \quad (18)$$

где N – четное.

Импульсные характеристики фильтров при нечетных N совпадают с импульсными характеристиками фильтров при $N - 1$. Полные выражения для импульсных характеристик фильтров довольно громоздки, поэтому ниже приводятся выражения для коэффициентов, входящих в (18):

при $N = 2$

$$\chi_0 = 3 \frac{3M^2 + 3M - 1}{8M^3 + 12M^2 - 2M - 3}; \quad \chi_2 = -\frac{15}{8M^3 + 12M^2 - 2M - 3} \quad (19)$$

при $N = 4$

$$\chi_0 = \frac{15}{4} \frac{15M^4 + 30M^3 - 35M^2 - 50M + 12}{32M^5 + 80M^4 - 80M^3 - 200M^2 + 18M + 45}; \quad (20a)$$

$$\chi_2 = -\frac{525}{4} \frac{2M^2 + 2M - 3}{32M^5 + 80M^4 - 80M^3 - 200M^2 + 18M + 45}; \quad (20б)$$

$$\chi_4 = \frac{1}{4} \frac{945}{32M^5 + 80M^4 - 80M^3 - 200M^2 + 18M + 45}. \quad (20в)$$

при $N = 6$

$$\chi_0 = \frac{35}{4} \frac{35M^6 + 105M^5 - 280M^4 - 735M^3 + 497M^2 + 882M - 180}{128M^7 + 448M^6 - 1120M^5 - 3920M^4 + 2072M^3 + 7252M^2 - 450M - 1575}; \quad (21a)$$

$$\chi_2 = -\frac{735}{4} \frac{15M^4 + 30M^3 - 90M^2 - 105M + 101}{128M^7 + 448M^6 - 1120M^5 - 3920M^4 + 2072M^3 + 7252M^2 - 450M - 1575}; \quad (21б)$$

$$\chi_4 = \frac{8085}{4} \frac{3M^2 + 3M - 10}{128M^7 + 448M^6 - 1120M^5 - 3920M^4 + 2072M^3 + 7252M^2 - 450M - 1575}; \quad (21в)$$

$$\chi_6 = \frac{1}{4} \frac{15015}{128M^7 + 448M^6 - 1120M^5 - 3920M^4 + 2072M^3 + 7252M^2 - 450M - 1575}. \quad (21г)$$

при $N = 8$

$$\chi_0 = \frac{945}{64} \frac{105M^8 + 420M^7 - 2030M^6 - 7560M^5 +}{512M^9 + 2304M^8 - 10752M^7 - 48384M^6 +} \frac{+10969M^4 + 35028M^3 - 17684M^2 - 36528M + 6720}{+63168M^5 + 284256M^4 - 103328M^3 - 464976M^2 + 22050M + 99225}; \quad (22a)$$

$$\chi_2 = -\frac{17325}{32} \frac{42M^6 + 126M^5 -}{512M^9 + 2304M^8 - 10752M^7 - 48384M^6 +} \frac{-651M^4 - 1512M^3 + 2625M^2 + 3402M - 2630}{+63168M^5 + 284256M^4 - 103328M^3 - 464976M^2 + 22050M + 99225}; \quad (22б)$$

$$\chi_4 = \frac{945945}{64} \frac{105M^8 + 420M^7 - 2030M^6 - 7560M^5 +}{512M^9 + 2304M^8 - 10752M^7 - 48384M^6 +} \frac{6M^4 + 12M^3 - 66M^2 - 72M + 145}{+63168M^5 + 284256M^4 - 103328M^3 - 464976M^2 + 22050M + 99225}; \quad (22в)$$

$$\chi_6 = -\frac{675675}{32} \frac{42M^6 + 126M^5 -}{512M^9 + 2304M^8 - 10752M^7 - 48384M^6 +} \frac{6M^2 + 6M - 35}{+63168M^5 + 284256M^4 - 103328M^3 - 464976M^2 + 22050M + 99225}; \quad (22г)$$

$$\chi_8 = \frac{3828825}{64} \frac{1}{512M^9 + 2304M^8 - 10752M^7 - 48384M^6 + 63168M^5 + 284256M^4 - 103328M^3 - 464976M^2 + 22050M + 99225} \quad (22д)$$

При $N > 8$ расчет импульсной характеристики МНК-фильтров может быть запрограммирован на основе более общего выражения (15). Примеры импульсных и амплитудно-частотных характеристик при различных степенях полинома $N = 2, 4, 6, 8$ и порядке сглаживающей аппроксимации $M = 10$ приведены на рис. 12–15. Импульсная характеристика рассматриваемых фильтров четно-симметрична, поэтому их реализация потребует не более $M + 1$ умножений.

МНК-фильтры являются фильтрами нижних частот. Частотная характеристика имеет выраженный главный лепесток и боковые лепестки.

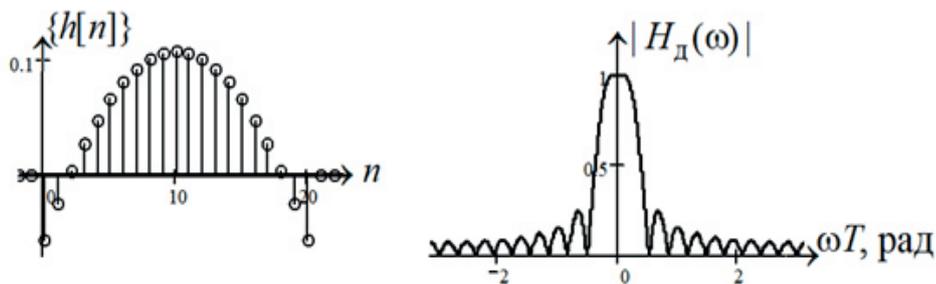


Рис. 12. Импульсная и амплитудно-частотная характеристики МНК-фильтра при $N = 2$ и $M = 10$.

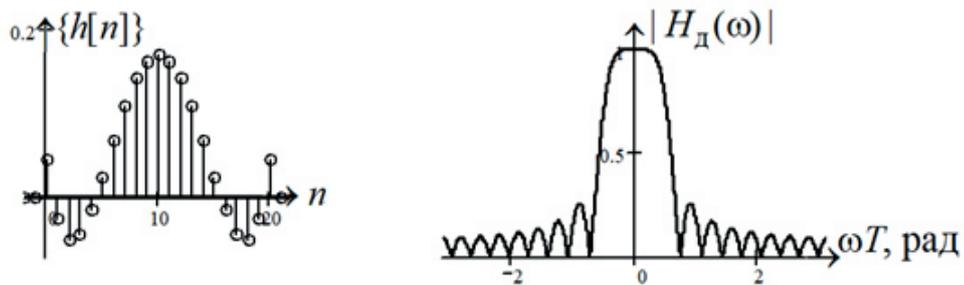


Рис. 13. Импульсная и амплитудно-частотная характеристики МНК-фильтра при $N = 4$ и $M = 10$.

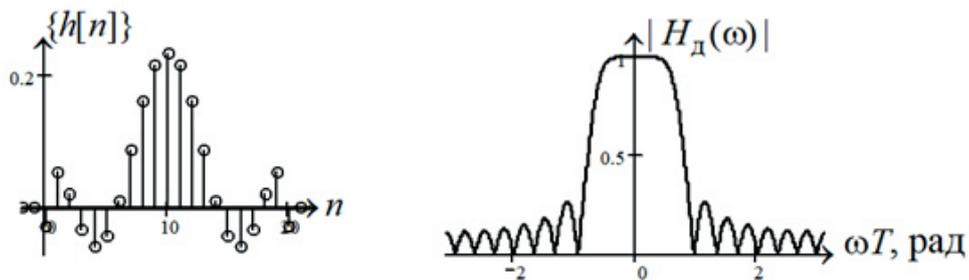


Рис. 14. Импульсная и амплитудно-частотная характеристики МНК-фильтра при $N = 6$ и $M = 10$.

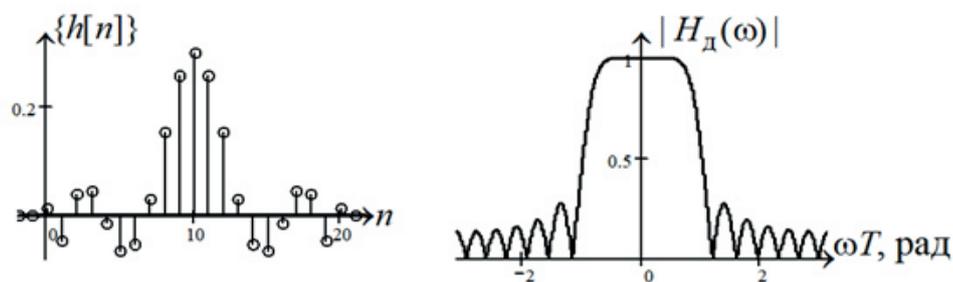


Рис. 15. Импульсная и амплитудно-частотная характеристики МНК-фильтра при $N = 8$ и $M = 10$.

Увеличение степени многочлена сопровождается расширением области частот, в которой амплитудно-частотная характеристика практически равномерна и не имеет пульсаций. Ширина главного лепестка зависит от N и M : увеличение степени полинома N приводит к расширению главного лепестка, увеличение порядка аппроксимации M приводит к уменьшению ширины главного лепестка. Уровень первого бокового лепестка L_{\min} слабо зависит от N и M . Значения ширины главного лепестка $\Delta\omega_0 T$ и уровень первого бокового лепестка L_{\min} приведены в табл. 3. Для ориентировочных расчетов можно предложить аппроксимацию

$$\Delta\omega_0 T \approx \frac{A(N)}{M},$$

где $A(N) = 10; 15; 20; 15$ для $N = 2, 4, 6, 8$, соответственно.

Таблица 3. Ширина главного лепестка и уровень первого бокового лепестка амплитудно-частотной характеристики МНК-фильтра

M	$N = 2$		$N = 4$		$N = 6$		$N = 8$	
	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ
5	2.028	-11.80	2.919	-11.0	3.935	-10.20	5.268	-8.00
6	1.714	-12.00	2.416	-11.3	3.236	-10.90	4.156	-10.05
7	1.467	-12.06	2.094	-11.5	2.762	-11.20	3.490	-10.70
8	1.270	-12.13	1.840	-11.6	2.412	-11.30	3.008	-10.97
9	1.142	-12.17	1.650	-11.7	2.150	-11.42	2.660	-11.18
10	1.046	-12.20	1.508	-11.8	1.914	-11.48	2.380	-11.29
11	0.952	-12.22	1.346	-11.8	1.744	-11.56	2.158	-11.35
12	0.888	-12.24	1.256	-11.8	1.618	-11.58	1.968	-11.41
13	0.812	-12.25	1.157	-11.9	1.492	-11.62	1.816	-11.46
14	0.761	-12.26	1.078	-11.9	1.396	-11.67	1.686	-11.49
15	0.698	-12.27	1.012	-11.9	1.270	-11.70	1.586	-11.52
16	0.666	-12.28	0.952	-11.9	1.206	-11.71	1.486	-11.55
17	0.635	-12.28	0.889	-12.0	1.142	-11.72	1.396	-11.57
18	0.604	-12.29	0.826	-12.0	1.078	-11.74	1.301	-11.62
19	0.572	-12.29	0.794	-12.0	1.015	-11.75	1.240	-11.64
20	0.509	-12.29	0.762	-12.0	0.952	-11.76	1.178	-11.67

Таблица 3. Окончание

M	N = 2		N = 4		N = 6		N = 8	
	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ	$\omega_0 T$, рад	L_{\min} , дБ
21	0.508	-12.30	0.722	-12.0	0.921	-11.77	1.136	-11.67
22	0.480	-12.30	0.698	-12.0	0.889	-11.77	1.078	-11.68
23	0.468	-12.30	0.672	-12.0	0.826	-11.78	1.015	-11.68
24	0.444	-12.31	0.635	-12.0	0.826	-11.78	0.988	-11.68
25	0.416	-12.31	0.604	-12.0	0.770	-11.79	0.952	-11.68

Подавление амплитудно-частотной характеристики вне главного лепестка может быть улучшено при последовательном соединении K звеньев. При добавлении одного звена результирующее подавление вне главного лепестка улучшается более, чем на -10 дБ. Амплитудно-частотные характеристики результирующего фильтра из $K = 5$ звеньев при различных степенях полинома $N = 2, 4, 6, 8$ и порядке сглаживающей аппроксимации $M = 10$ показаны на рис. 16, 17. Каскадированные МНК-фильтры являются фильтрами с П-образной амплитудно-частотной и линейной фазо-частотной характеристиками.

Главный лепесток амплитудно-частотной характеристики результирующего фильтра может быть описан выражением:

$$H_d(\omega) \approx \left| 1 - \left| \frac{2\omega T}{\Delta\omega_0 T} \right|^\alpha \right|^{K\beta}, \quad -\frac{\Delta\omega_0 T}{2} \leq \omega T \leq \frac{\Delta\omega_0 T}{2}. \quad (23)$$

Параметры аппроксимирующей функции α и β приведены в табл. 4.

Таблица 4. Параметры α, β

N	2	4	6	8
α	3.4	4.5	6.1	7.0
β	1.5	1.5	1.8	1.8

Относительную ширину переходной полосы $\delta\omega$ находят из (23):

$$\delta\omega \approx \frac{\omega_{\Pi} - \omega_c}{\omega_c} = \left(\frac{1 - \frac{1}{L_{\Pi}^{K\beta}}}{1 - \frac{1}{L_c^{K\beta}}} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

где ω_c, ω_{Π} – частоты среза и подавления; L_c, L_{Π} – уровни среза и подавления.

Диаграмма зависимости относительной ширины переходной полосы от количества звеньев фильтра показана на рис. 18.

Относительная ширина переходной полосы в исследованном диапазоне слабо зависит от количества звеньев K и порядка аппроксимации M . Поэтому количество звеньев подбирают, исходя из требуемого подавления, параметр N – из требуемой ширины переходной полосы, а выбор M должен обеспечить требуемую полосу пропускания. Не исключен и другой выбор параметров, учитывающий, что полоса пропускания, вообще говоря, зависит от двух параметров: N и M .

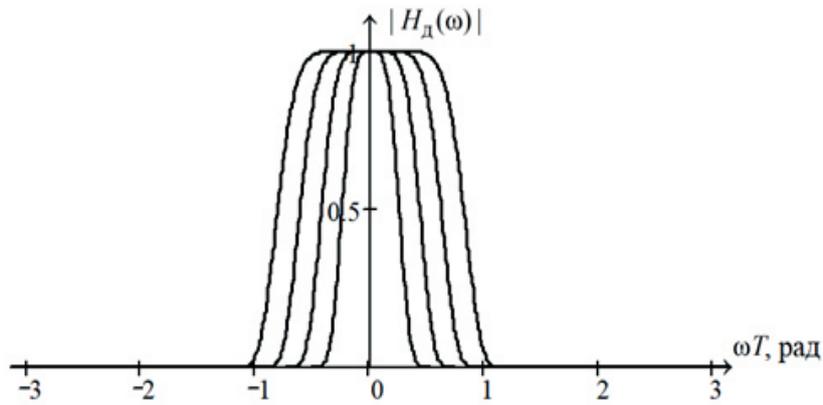


Рис. 16. Результирующая амплитудно-частотная характеристика при $N = 2, 4, 6, 8$; $M = 10$; $K = 5$.

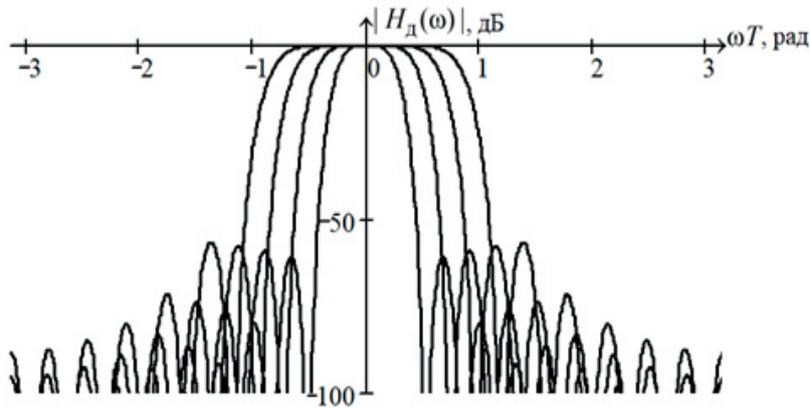


Рис. 17. Результирующая амплитудно-частотная характеристика (в децибелах) при $N = 2, 4, 6, 8$; $M = 10$; $K = 5$.

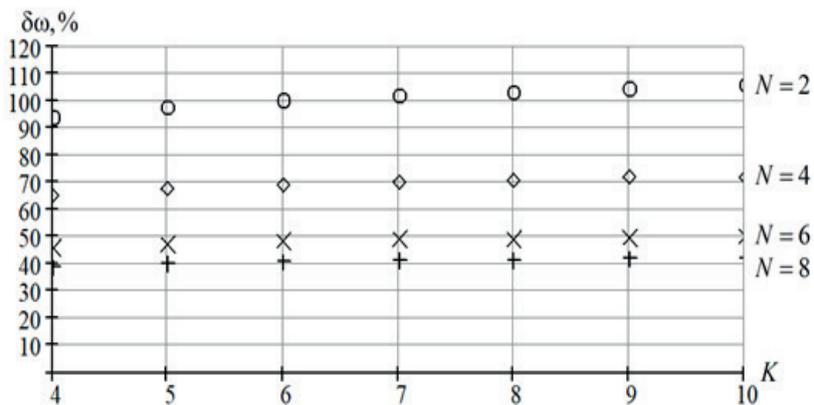


Рис. 18. Зависимость относительной ширины переходной полосы результирующего фильтра от количества звеньев (уровень полосы пропускания -3 дБ, уровень подавления -40 дБ).

Заключение

Рассмотрен подход к эвристическому синтезу дифференцирующих, интегрирующих и сглаживающих цифровых фильтров, а также фильтров с линейной фазочастотной характеристикой и П-образной амплитудно-частотной характеристикой, согласно которому получаемые цифровые фильтры представляют собой результирующий эффект нескольких этапов, предполагающих восстановление обрабатываемого сигнала, выполнение требуемой процедуры с полученным аналоговым сигналом и последующей дискретизацией. С использованием различных методов локальной интерполяции и аппроксимации предложены некоторые виды цифровых фильтров в соответствии с их функциональным назначением. Полученные результаты представлены в форме, предполагающей их непосредственное использование в задачах обработки сигналов.

Предложенные цифровые фильтры могут применяться в задачах экономического, финансового и статистического анализа данных, а также в задачах обработки данных физического или химического эксперимента.

Литература:

1. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: практический подход, 2-е изд. : Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. 992 с.
2. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов: Пер. с англ. М.: ООО «Бином-Пресс», 2006. 656 с.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.
4. Antoniou A. Digital Filters: Analysis and Design. McGraw-Hill, 1979. 524 p.
5. Каппелини В., Константинодис А.Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1983. 360 с.
6. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры: Пер. с англ. / Под ред. А.М. Трахтмана. М.: Сов. радио, 1980. 224 с.
7. Savitzky A., Golay M.J.E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures // Anal. Chem. 1964. V. 36. № 8. P. 1627–1639. doi:10.1021/ac60214a047
8. Madden H.H. Comments on the Savitzky–Golay convolution method for least-squares-fit smoothing and differentiation of digital data // Anal. Chem. 1978. V. 50. № 9. P. 1383–1386. doi:10.1021/ac50031a048.
9. Никонов А.В., Давлетшин Р.В., Яковлева Н.И., Лазарев П.С. Фильтрация методом Савицкого-Голея спектральных характеристик чувствительности матричных фотоприемных устройств // Успехи прикл. физики. 2016. Т. 4. № 2. С. 198–205.
10. Денисенко А.Н., Исаков В.Н. Применение различных методов восстановления непрерывных сигналов по их дискретным значениям // Радиотехника. 2001. № 10. С. 16–20.
11. Исаков В.Н. Сходимость при регулярной интерполяции и локальные интерполяционные базисы // Научные технологии. 2013. № 4. С. 40–46.
12. Исаков В.Н. Оптимальная регулярная локальная сплайновая интерполяция сигналов // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2016. № 4. С. 24–31.
13. Исаков В.Н. Фундаментальные интерполяционные базисы и спектральный ана-

лиз при локальной интерполяции обобщенными сплайнами // Вестник МГТУ МИРЭА. 2015. № 1 (6). С. 144–154.

14. Денисенко А.Н. Сигналы. Теоретическая радиотехника: Справочное пособие. М.: Горячая линия-Телеком, 2005. 704 с.

15. Битюков В.К., Симачков Д.С. Источники вторичного электропитания: Учебник. М.: Инфра-Инженерия, 2017.

References:

1. Ifeachor E.C., Jervis B.W. Digital Signal Processing: A Practical Approach, Second edition : transl. from English. Moscow: Publ. House «Vilyams», 2008. 992 p. (in Russ.)

2. Lyons R.G. Digital Signal Processing : transl. from English. Moscow: Binom-Press Publ., 2006. 656 p. (in Russ.)

3. Rabiner L.R., Gold B. Theory and Application of Digital Signal Processing : transl. from English. Moscow: Mir Publ., 1978. 848 p. (in Russ.)

4. Antoniou A. Digital Filters: Analysis and Design. McGraw-Hill, 1979. 524 p.

5. Cappellini V., Constantinides A.G., Emilani P. Digital filters and their applications. London: Academic Press, 1978. 393 p.

6. Hamming R.W. Digital filters: transl. from English. Moscow: Sovetskoe Radio Publ., 1980. 224 p. (in Russ.)

7. Savitzky A., Golay M.J.E. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures // Anal. Chem. 1964. V. 36. № 8. P. 1627–1639. doi:10.1021/ac60214a047

8. Madden H.H. Comments on the Savitzky–Golay convolution method for least-squares-fit smoothing and differentiation of digital data // Anal. Chem. 1978. V. 50. № 9. P. 1383–1386. doi:10.1021/ac50031a048.

9. Nikonov A.V., Davletshin R.V., Yakovleva N.I., Lazarev P.S. Savitzky-Golay smoothing method of FPA photodiodes spectral response // Uspekhi Prikladnoi Fiziki (Advances in Applied Physics). 2016. V. 4. № 2. P. 198–205. (in Russ.)

10. Denisenko A.N., Isakov V.N. The application of various methods for reconstructing continuous signals from their discrete values // Radiotekhnika (Radioengineering). 2001. № 10. P. 16–20. (in Russ.)

11. Isakov V.N. Convergence of regular interpolation and local interpolation bases // Naukoemkie tekhnologii (Science Intensive Technologies). 2013. № 4. P. 40–46. (in Russ.)

12. Isakov V.N. Optimum regular local spline interpolation of signals // Vestnik Kontserna VKO «Almaz – Antey» (Herald of Concern of Air and Space Defense "Almaz-Antey"). 2016. № 4. P. 24–31. (in Russ.)

13. Isakov V.N. Fundamental interpolating bases and spectral analysis at local interpolation with generalized splines // Vestnik MGTU MIREA. 2015. № 1 (6). P. 144–154. (in Russ.)

14. Denisenko A.N. Signals. Theoretical Radio Engineering: Handbook. Moscow: Goryachaya Liniya-Telecom Publ., 2005. 704 p. (in Russ.)

15. Bitjukov V.K., Simachkov D.S. Sources of secondary power supply. Moscow: Infra-Inzheneriya Publ., 2017. (in Russ.)

Об авторах:

Исаков Владимир Николаевич, старший преподаватель кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

Тимошенко Полина Игоревна, студентка кафедры теоретической радиотехники и радиофизики Института радиотехнических и телекоммуникационных систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78).

About the authors:

Vladimir N. Isakov, Senior Lecturer, Chair of Theoretical Radio Engineering and Radio Physics, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).

Polina I. Timoshenko, Student, Chair of Theoretical Radio Engineering and Radio Physics, Institute of Radio Engineering and Telecommunication Systems, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo Pr., Moscow 119454, Russia).