

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 519.224.22, 519.246.8, 330.322.54
<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-93-110>
EDN JCRKUO



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений

А.А. Мицель,
Е.В. Викторенко [®]

Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, 634050
Россия

[®] Автор для переписки, e-mail: viktorenko.e@gmail.com

Резюме

Цели. Рассматриваются модели управления инвестиционными портфелями, носящими динамический характер, проводится сравнение исследований, посвященных BSF-портфелям (состоящим из безрискового актива (bond), акции (stock) и потока платежей (cash flow)) с древовидной структурой цен рискованного актива. Целью работы является разработка динамической модели управления BSF-портфелем, включающим безрисковый, рискованный активы и депозит. В отличие от проведенных ранее исследований, в разрабатываемой модели цены рискованного актива изменяются случайным образом, следуя древовидной структуре. К исследованию предлагается два подхода формирования портфеля: 1) начальный капитал вкладывается в безрисковый актив, управление происходит за счет рискованного актива; 2) начальный капитал вкладывается в рискованный актив, управление происходит за счет безрискового актива.

Методы. Использована биномиальная модель для моделирования цен рискованного актива. Динамическая модель управления на основе древовидной структуры цен рискованного актива позволяет учитывать изменения в ценах активов. Сравнительный анализ результатов моделирования выявляет оптимальный способ управления.

Результаты. Разработана динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений. Показано, что динамическая модель управления на основе древовидной структуры цен рискованного актива позволяет повысить точность оценки объема вложений от 2.4 до 2.7 раз для первого подхода и от 1.7 до 2.7 раз – для второго. Повышение точности оценки объемов вложений по сравнению с ранее предложенными моделями достигается путем усреднения цен по различным вершинам дерева.

Выводы. Проведенное исследование позволяет говорить о том, что применение динамической модели управления, основанной на древовидной структуре цен, позволяет значительно повысить точность оценки объема вложений в инвестиционный портфель.

Ключевые слова: оптимальное управление, динамическая система со случайными параметрами, динамическое программирование, инвестиционный портфель, слежение за эталонным портфелем, биномиальная структура цен рискованного актива

• Поступила: 26.02.2024 • Доработана: 24.06.2024 • Принята к опубликованию: 17.02.2025

Для цитирования: Мицель А.А., Викторенко Е.В. Динамическая модель управления BSF-портфелем без ограничений. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):93–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-93-110>, <https://elibrary.ru/JCRKUO>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Dynamic model of BSF portfolio management

Artur A. Mitsel,
Elena V. Viktorenko @

Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics, Tomsk, 634050 Russia

@ Corresponding author, e-mail: viktorenko.e@gmail.com

Abstract

Objectives. The work compares studies on BSF portfolios consisting of a risk-free Bond (B) asset, a Stock (S), and a cash Flow (F) that represents risky asset prices in the form of a tree structure. On the basis of existing models for managing dynamic investment portfolios, the work develops a dynamic model for managing a BSF portfolio that combines risk-free and risky assets with a deposit. Random changes in the prices of a risky asset are reflected in the developed model according to a tree structure. Two approaches to portfolio formation are proposed for the study: (1) initial capital is invested in a risk-free asset, while management is conducted at the expense of a risky asset; (2) the initial capital is invested in a risky asset, but management is carried out at the expense of a risk-free asset.

Methods. A binomial model was used to predict the prices of risky assets. Changes in risky asset prices in the model are dynamically managed via a branching tree structure. A comparative analysis of modeling results reveals the optimal control method.

Results. A dynamic model for unrestricted management of a BSF portfolio has been developed. By presenting risky asset prices according to a tree structure, the model can be used to increase the accuracy of evaluating investments by from 2.4 to 2.7 times for the first approach and from 1.7 to 2.7 times for the second. The increased accuracy of evaluating investments as compared with previously proposed models is achieved by averaging prices at various vertices of the tree.

Conclusions. The results of the research suggest that the use of a dynamic management model based on a tree-like price structure can significantly increase the accuracy of evaluating investments in an investment portfolio.

Keywords: optimal control, dynamic system with random parameters, dynamic programming, investment portfolio, tracking a reference portfolio, binomial price structure of a risky asset

• Submitted: 26.02.2024 • Revised: 24.06.2024 • Accepted: 17.02.2025

For citation: Mitsel A.A., Viktorenko E.V. Dynamic model of BSF portfolio management. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):93–110. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-93-110>, <https://elibrary.ru/JCRKUO>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы управления портфелем ценных бумаг (инвестиционным портфелем – ИП) можно рассматривать как многопериодные задачи динамического принятия решений, когда транзакции происходят в дискретные моменты времени. Инвестор оценивает возможные будущие изменения процентных ставок, цен, денежных потоков от ценных бумаг, на этой информации основываются дальнейшие действия по покупке или продаже, решения об открытии вкладов или кредитовании, т.е. решения по реформированию ИП. Статья посвящена разработке и проверке динамической модели управления портфелем, включающим в себя рисковый актив (РА), безрисковый актив (БА) и депозит.

Модели управления ИП, носящими динамический характер, подробно исследовались в работах [1–12]. В научной работе В.В. Домбровского [1] освещаются проблемы управления дискретными стохастическими системами и применение квадратичного критерия в такой сфере. Автор подробно рассматривает системы, где присутствуют различные случайные параметры, аддитивные и мультипликативные шумы. Данные системы отличаются тем, что их функционирование зависит от состояний и управляющих воздействий. В результате исследования получены соответствующие уравнения для оптимальных линейных статических и динамических регуляторов по выходу. Полученные выводы применяются для решения задачи динамической оптимизации ИП. Предметом исследования [1] является портфель, состоящий из финансовых активов с переменной волатильностью цен и анализируемый в дискретном времени. Практическое значение работы заключается в возможности разработки эффективных стратегий управления ИП. В [3] рассматриваются задачи синтеза стратегий управления в дискретных системах с использованием прогнозирующей модели. В этих системах, аналогично исследованию, проведенному в [1], присутствуют случайные параметры, аддитивные и мультипликативные шумы, которые зависят от состояний и управлений. Целью работы [3] является разработка стратегий управления с применением прогнозирования для замкнутой и разомкнутой систем. Результаты, полученные в ходе исследования, применяются для решения задачи динамической оптимизации ИП с учетом ограничений на объемы торговых операций. Исследование [3] имеет важное практическое значение, т.к. позволяет разработать эффективные стратегии управления ИП с учетом случайных факторов и ограничений. В [8] рассмотрена проблема управления ИП, состоящим из РА и БА, с учетом динамического отслеживания

эталонного портфеля и достижения желаемой эффективности. Предполагается, что изменения цен на РА описываются стохастическими уравнениями с гауссовскими и импульсными пуассоновскими возмущениями. В работе применяется метод определения оптимальной стратегии управления с использованием обратной связи. Этот метод основывается на применении квадратичного критерия, который позволяет оценить качество управления и выбрать наилучшую стратегию. Оптимальная стратегия управления подбирается таким образом, чтобы минимизировать неопределенность и достичь наилучших результатов. Исследование [8] представляет научный вклад в области управления ИП с использованием методов стохастического анализа и обратной связи. В исследовании Д.В. Домбровского и Е.А. Ляшенко [9] осуществляется анализ динамики модели управления ИП с учетом ограничений на объемы торговых операций. Предполагается, что данная модель включает в себя стохастические разностные уравнения со случайной волатильностью, описывающие динамику цен рискованных финансовых активов в составе данного ИП. Рассматривается важная проблема управления ИП, а именно, эффективное управление инвестированием в условиях ограничений на объемы торговых операций. Это необходимо для минимизации рисков и достижения наилучших результатов в условиях финансовых рынков, где цены на активы подвержены случайным колебаниям. Волатильность цен рассматривается как случайная величина, которая является важным фактором в оценке и управлении рисками в инвестиционных стратегиях. В диссертационном исследовании Т.Ю. Пашинской¹ осуществлен синтез результатов исследований, посвященных управлению нелинейными дискретными системами со случайными параметрами при ограничениях. Основная цель автора заключалась в разработке методики отслеживания гипотетического эталонного портфеля с заранее заданной траекторией роста в области управления ИП. По результатам исследования получены уравнения, которые определяют оптимальные стратегии управления ИП с обратной связью при наличии ограничений. Работа Т.Ю. Пашинской представляет собой важный вклад

¹ Пашинская Т.Ю. *Управление с прогнозированием нелинейными дискретными системами со случайными параметрами при ограничениях*: дис. ... д. ф.-м. н.: 05.13.01. Томск: Том. гос. ун-т, 2021. <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:000702951>. Дата обращения 26.02.2024. [Pashinskaya T.Yu. *Control with prediction of nonlinear discrete systems with random parameters under constraints*: Cand. Sci. Thesis (Phys.-Math.). Tomsk: Tomsk State University; 2021. <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/koha:000702951> (in Russ.). Accessed February 26, 2024.]

в развитие области управления ИП и имеет практическую значимость для финансовых учреждений и инвесторов. В [13] разработана динамическая модель управления ИП с использованием линейного критерия качества.

Исследования, посвященные BSF-портфелям (состоящим из БА (B, Bond), акции (S, Stock) и потока платежей (F, Cash Flow)) с древовидной структурой цен РА, проведены в работах [14–21]. В этих исследованиях выполнен анализ структуры рынка, включающего такие активы, как акции, БА и поток платежей. Авторы работ раскрывают сущность модели и устанавливают определенные условия полноты и отсутствия арбитража на рынке. Кроме того, описывается численный подход к разработке самофинансируемой стратегии, которая при начальном портфеле минимальной стоимости обеспечивает платежную функцию, превосходящую установленную в терминальных вершинах дерева цен. В работах [17–21] проведен анализ свойств (B, S)-рынка при возникновении нарушений условий рыночной полноты и безарбитражности. Особое внимание уделяется проблемам, связанным с недостаточной адекватностью модельного представления эволюции цен РА в процессе биржевых торгов, осуществляемых с использованием биномиального механизма ценообразования в условиях неполного (B, S)-рынка. Также были рассмотрены методы учета воздействия рыночных трендов на процесс эволюции цен РА.

В данном исследовании предлагается новая динамическая модель управления BSF-портфелем, включающая БА, РА и депозит. В отличие от работ [1–12], в этой модели цены РА изменяются случайным образом, следуя древовидной структуре. Новизной модели является повышение точности оценки объемов вложений по сравнению с предыдущей моделью, описанной в работе Т.Ю. Пашинской. Этот эффект достигается путем усреднения цен по различным вершинам дерева.

ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Рассмотрим портфель, состоящий из БА, РА и депозита. Будем рассматривать дискретные моменты времени $0, 1, 2, \dots, n$. Обозначим за $r_1(t)$ ставку доходности БА. Цена БА известна в каждый момент времени. Цена РА изменяется случайным образом, причем она может принимать одно из двух возможных значений, т.е. возможные цены акции имеют структуру бинарного дерева (рис. 1) с терминальными вершинами (рис. 2). Обозначим за p вероятность того, что цена РА увеличилась на случайную величину η , а за $q = 1 - p$ – вероятность того, что цена актива уменьшилась на случайную величину η .

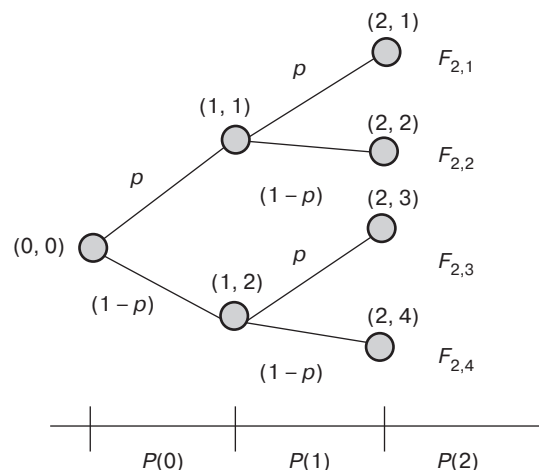


Рис. 1. Двухпериодное дерево РА. $F_{t,i}$ – функция платежа для точки с номером (t, i) , $P(t)$ – платеж для временного шага t

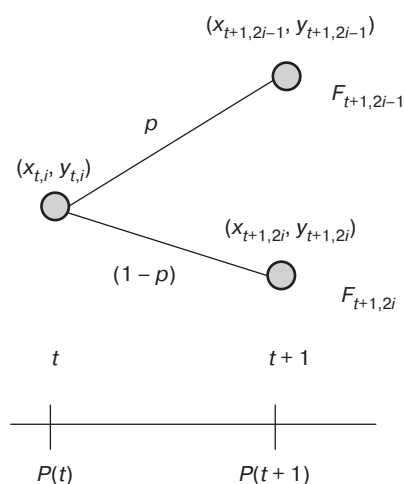


Рис. 2. Терминальные вершины дерева РА

Обозначим за x долю БА, а за y – долю РА. Наследниками (t, i) -й вершины являются вершины с номерами $(t + 1, 2i - 1)$ и $(t + 1, 2i)$. Цена БА в вершине с номером (t, i) , соответствующей моменту времени t , равна $C(t)$, а цена БА в вершинах с номерами $(t + 1, 2i - 1)$ и $(t + 1, 2i)$, соответствующих моменту времени $t + 1$, равна $C'(t + 1)$. Цена РА в вершине с номером (t, i) , соответствующей моменту времени t , равна $C''_{t,i}$, а цены РА в вершинах с номерами $(t + 1, 2i - 1)$ и $(t + 1, 2i)$, соответствующих моменту времени $t + 1$, равны $C''_{t+1,2i-1} = C''_{t,i}(1 + \eta_i)$ и $C''_{t+1,2i} = C''_{t,i}(1 - \eta_i)$ соответственно. Для каждого временного шага t установлены платежи $P(t)$.

Предположим, что на начальном этапе все имеющиеся средства были вложены в БА и не было использовано заемных средств. Важно отметить, что как БА, так и РА могут быть приобретены или отчуждены в любой момент времени, что подразумевает их высокую степень доступности и готовность к торговле [15, 16]. Одной из ключевых особенностей платежного потока является его ограниченная

ликвидность, где платежи заранее определены. Каждый путь от исходной вершины древовидной структуры цен к терминальной вершине представляет собой определенный сценарий развития событий и, следовательно, является случайным.

Метод управления портфелем активов заключается в определении в каждой точке дерева цен объемов БА x_i и РА y_i при соблюдении следующих условий [16, 17]:

- а) для каждой конечной точки дерева определена функция платежа $F_{t,i} \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, 2^t$, представляющая собой сумму, которую инвестор ожидает получить при достижении цен на активы соответствующей вершины дерева, после продажи активов и осуществления выплат или поступлений средств по потоку платежей;
- б) за займы активов предусмотрена плата. Например, при займе x единиц БА в следующий момент времени следует вернуть λx единиц (БА), а μ – плата за займ РА;
- в) рынок является самофинансируемым, т.е. инвестор может покупать и продавать активы, обеспечивая выплаты и поступления по потоку платежей так, чтобы стоимость портфеля в каждый момент времени не менялась, но при этом средняя по вершинам стоимость портфеля со временем изменялась по заданному закону в соответствии с законом изменения средней по вершинам платежной функции. Для конкретных вершин математически это записывается следующим образом:

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i-1} \mu y_{t,i} + P(t+1) = C'(t+1)x_{t+1,2i-1} + C''_{t+1,2i-1} y_{t+1,2i-1}, \quad (1)$$

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i} \mu y_{t,i} + P(t+1) = C'(t+1)x_{t+1,2i} + C''_{t+1,2i} y_{t+1,2i} \quad (2)$$

при $i = \overline{1, 2^t}$.

В терминальных вершинах должны выполняться неравенства:

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i-1} \mu y_{t,i} + P(t+1) \geq F_{t+1,2i-1}, \quad (3)$$

$$C'(t+1)\lambda x_{t,i} + C''_{t+1,2i} \mu y_{t,i} + P(t+1) \geq F_{t+1,2i}. \quad (4)$$

Построение динамической модели BSF-портфеля с одним РА и одним БА

Будем анализировать ИП, где составляющими являются РА с переменными доходностями и безрисковый вклад с постоянной доходностью. В момент

времени t средства, инвестированные в РА, равны $V''(t)$, в БА – $V'(t)$. Тогда общий объем вложений в момент времени t будет равен с учетом депозита

$$V(t) = V'(t) + V''(t) - P(t). \quad (5)$$

Используя формулы (1), (2) для момента времени $t = 1$ (вершины (1, 1) и (1, 2)), получим

$$\begin{aligned} C'(1)x_{1,1} + C''_{1,1}y_{1,1} - P(1) &= C'(1)\lambda x_{0,0} + \mu C''_{1,1}y_{0,0}, \\ C'(1)x_{1,2} + C''_{1,2}y_{1,2} - P(1) &= C'(1)\lambda x_{0,0} + \mu C''_{1,2}y_{0,0}. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что цены РА в вершинах (1, 1) и (1, 2) являются случайными, принимающими значения $C''_{1,1}$ и $C''_{1,2}$ с вероятностями p и $q = 1 - p$ соответственно, стоимость портфеля в момент времени $t = 1$ будет равна

$$V(1) = \lambda C'(1)x_{0,0} + \mu C''(1)y_{0,0}. \quad (6)$$

Здесь $C'(1)x_{0,0}$ – стоимость БА в момент времени $t = 1$; $C''(1)y_{0,0}$ – стоимость РА в момент времени $t = 1$; $C''(1)$ – среднее значение цены РА в момент времени $t = 1$.

$$C''(1) = pC''_{1,1} + qC''_{1,2}. \quad (7)$$

Для момента времени $t = 2$ (вершины (2, 1), (2, 2), (2, 3) и (2, 4)) получим:

$$V(2) = \lambda C'(2)x_1 + \mu C''(2)y_1. \quad (8)$$

Здесь

$$C''(2) = p(pC''_{2,1} + qC''_{2,2}) + q(pC''_{2,3} + qC''_{2,4}) \quad (9)$$

является средним по вершинам значением цены РА в момент времени $t = 2$; x_1 – среднее значение доли БА в момент времени $t = 1$; y_1 – среднее значение доли РА в момент времени $t = 1$.

Для момента времени $t = 3$ (вершины (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8)) получим:

$$V(3) = \lambda C'(3)x_2 + \mu C''(3)y_2, \quad (10)$$

где x_2 – среднее значение доли БА в момент времени $t = 2$; y_2 – среднее значение доли РА в момент времени $t = 2$; $C''(3)$ – среднее значение цены РА в момент времени $t = 3$.

$$\begin{aligned} C''(3) &= p(p(pC''_{3,1} + qC''_{3,2}) + q(pC''_{3,3} + qC''_{3,4})) + \\ &+ q(p(pC''_{3,5} + qC''_{3,6}) + q(pC''_{3,7} + qC''_{3,8})). \end{aligned} \quad (11)$$

Продолжая этот процесс, получим:

$$V(t) = \lambda C'(t)x_{t-1} + \mu C''(t)y_{t-1}, \quad t = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

где $x_0 = x_{0,0}$, $y_0 = y_{0,0}$. Здесь x_{t-1} – среднее по вершинам значение доли БА в момент времени $t - 1$; y_{t-1} – среднее значение доли РА в момент времени $t - 1$; $C''(t)$ – среднее значение цены РА в момент времени t ; y_t – среднее значение доли РА в момент времени t .

Введем величины

$$m_{t,i} = pC''_{t,2i-1} + qC''_{t,2i}, \quad i = \overline{1, 2^{t-1}}. \quad (13)$$

Тогда средняя цена РА в моменты времени $1, 2, 3, \dots$ может быть представлена в виде

$$C''(1) = m_{1,1}, \quad (14)$$

$$C''(2) = pm_{1,1} + qm_{2,2}, \quad (15)$$

$$C''(3) = p(pm_{3,1} + qm_{3,2}) + q(pm_{3,3} + qm_{3,4}). \quad (16)$$

Нетрудно показать, что для любого момента времени t сумма вероятностей равна 1. Действительно,

$$\sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1, \quad (17)$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальные коэффициенты.

В терминальных вершинах должны выполняться неравенства:

для момента времени $t = 1$

$$\lambda C'(1)x_{0,0} + \mu C''(1)y_{0,0} + P(1) \geq F(1); \quad (18)$$

для момента времени $t = 2$

$$\lambda C'(2)x_1 + \mu C''(2)y_1 + P(2) \geq F(2); \quad (19)$$

для момента времени t

$$\lambda C'(t)x_{t-1} + \mu C''(t)y_{t-1} + P(t) \geq F(t), \quad t = \overline{1, n}. \quad (20)$$

Здесь $F(t)$ – среднее значение платежной функции в момент времени t . В нашем случае это детерминированная априори известная величина.

В соответствии с подходом, обозначенным в диссертационном исследовании Т.Ю. Пашинской, введем ставку доходности РА за период времени $[t, t + 1]$:

$$v(t+1) = \frac{C''(t+1) - C''(t)}{C''(t)}. \quad (21)$$

Ранее была введена величина $r_1(t)$ – ставка доходности БА. Введем величину $r_2(t)$ – ставку по займу БА (ставка по депозиту).

Динамика цены БА и безрискового займа определяются выражениями:

$$C'(t+1) = C'(t)(1 + r_1(t+1)), \quad (22)$$

$$P(t+1) = P(t)(1 + r_2(t+1)). \quad (23)$$

Тогда из формул (20), (22) и (23) для момента времени $t + 1$ следует:

$$\lambda C'(t)(1 + r_1(t+1))x_t + \mu C''(t)(1 + v(t+1))y_t + P(t)(1 + r_2(t+1)) \geq F(t+1)$$

или

$$\lambda V'(t)(1 + r_1(t+1)) + \mu V''(t)(1 + v(t+1)) + P(t)(1 + r_2(t+1)) \geq F(t+1). \quad (24)$$

Модель 1

Рассмотрим изменение капитала ИП в дискретном времени. Такое изменение можно записать при помощи уравнения с учетом условия (24) и формулы (5):

$$V(t+1) = \lambda(1 + r_1(t+1))V(t) + V''(t)[\mu(1 + v(t+1)) - \lambda(1 + r_1(t+1))] + [\lambda(1 + r_1(t+1)) - (1 + r_2(t+1))]P(t), \quad (25)$$

$$t = 0, 2, \dots, n-1,$$

где n – глубина дерева.

Капитал, помещенный в БА, равен

$$V'(t) = V(t) - V''(t) + P(t). \quad (26)$$

Заметим, что выражение (25) совпадает с аналогичной формулой для динамики капитала при $\lambda = 1$, $\mu = 1$, полученной в работах В.В. Домбровского [10] и Т.Ю. Пашинской для случайной ставки РА.

Уравнение эталонного портфеля определим выражением для платежной функции:

$$F(t+1) = [1 + \mu_0(t)]F(t), \quad (27)$$

где $\mu_0(t)$ – заданная ставка эталонного портфеля. Данный показатель характеризует склонность инвестора к риску: чем он больше, тем выше склонность к риску. $F(0) = V(0)$ (в начальный момент времени капитал эталонного портфеля совпадает с капиталом реального ИП).

Введем обозначения $u1_1(t) = V''(t)$, $u1_2(t) = P(t)$,

$$A1(t) = \begin{pmatrix} \lambda(1 + r_1(t+1)) & 0 \\ 0 & (1 + \mu_0(t+1)) \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\mathbf{B1}(t) = \begin{pmatrix} \mu(1+v(t+1)) - \lambda(1+r_1(t+1)) & \lambda(1+r_1(t+1)) - (1+r_2(t+1)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\mathbf{z}(t) = (V(t) \ F(t))^T. \quad (30)$$

С учетом (29), (30) и (31) выражение (27) примет вид:

$$\mathbf{z}(t+1) = \mathbf{A1}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B1}(t)\mathbf{u1}(t), \quad (31)$$

где

$$\mathbf{u1}(t) = (V''(t) \ P(t))^T. \quad (32)$$

Управляющими переменными здесь являются величины

$$u1_1(t) = V''(t), \ u1_2(t) = P(t).$$

Стоимость безрисковой части портфеля при этом равна

$$\begin{aligned} V'(t) &= V(t) - V''(t) + P(t) = \\ &= V(t) - u1_1(t) + u1_2(t). \end{aligned} \quad (33)$$

Модель 2

Динамику капитала ИП в дискретном времени опишем уравнением с учетом условия (24) и формулы (5):

$$\begin{aligned} V(t+1) &= \mu(1+v(t+1))V(t) + \\ &+ V'(t)[\lambda(1+r_1(t+1)) - \mu(1+v(t+1))] + \\ &+ [\mu(1+v(t+1)) - (1+r_2(t+1))]P(t), \\ &t = 0, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (34)$$

где n – глубина дерева.

Тогда матрицы для модели 2 будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{A2}(t) = \begin{pmatrix} \mu(1+v(t)) & 0 \\ 0 & (1+\mu_0(t)) \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\mathbf{B2}(t) = \begin{pmatrix} \lambda(1+r_1(t)) - \mu(1+v(t)) & \mu(1+v(t)) - (1+r_2(t)) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

В качестве вектора управления теперь будет

$$\mathbf{u2}(t) = (V''(t) \ P(t))^T. \quad (37)$$

Стоимость рискованной части портфеля при этом равна

$$\begin{aligned} V''(t) &= V(t) - V'(t) + P(t) = \\ &= V(t) - u2_1(t) + u2_2(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Задача слежения

В качестве критерия оптимальности выберем квадратичный функционал

$$\begin{aligned} J &= \sum_{t=0}^{n-1} [V(t) - F(t)]^2 + (\mathbf{u}(t))^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + [V(n) - F(n)]^2 \rightarrow \\ &\rightarrow \min_u \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned} \quad (39)$$

$\mathbf{R}(t)$ – диагональная матрица весовых коэффициентов размерности 2×2 . Здесь под $\mathbf{u}(t)$ понимается либо $\mathbf{u1}(t)$, либо $\mathbf{u2}(t)$.

Второе слагаемое в функционале (39) накладывает ограничения на размеры денежных сумм, которые используются для купли/продажи ценных бумаг.

Запишем функционал (39) следующим образом:

$$J = \sum_{t=0}^{n-1} [\mathbf{z}^T(t) \mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{z}(t) + (\mathbf{u}(t))^T \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{z}^T(n) \mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{z}(n)], \quad (40)$$

где $\mathbf{h} = [1, -1]$.

Для определения оптимальной стратегии управления с обратной связью по квадратичному критерию используется линейный закон управления вида

$$\mathbf{u}(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)F(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t), \quad (41)$$

где $\mathbf{K}(t) = [K_1(t), K_2(t)]$ – матрица коэффициентов обратной связи – выбирается из условия минимума функционала (40).

Функционал (40) можно переписать в виде

$$J = \text{tr} \left\{ \sum_{t=0}^{n-1} [\mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{S}(t) + \mathbf{K}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{K}(t) \mathbf{S}(t)] + \mathbf{h}^T \mathbf{h} \mathbf{S}(n) \right\}, \quad (42)$$

где $\text{tr}\{\cdot\}$ – след матрицы, а матрица $\mathbf{S}(t) = \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t) = \begin{pmatrix} (V(t))^2 & V(t) \cdot F(t) \\ V(t) \cdot F(t) & (F(t))^2 \end{pmatrix}$.

Уравнение состояния

На основании (31) и (41) динамика матрицы $\mathbf{S}(t) = \mathbf{z}(t)\mathbf{z}^T(t)$ определяется выражением:

$$\mathbf{S}(t+1) = [\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]\mathbf{S}(t)[\mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)]^T. \quad (43)$$

Здесь в качестве $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ берутся либо $\mathbf{A1}(t)$, $\mathbf{B1}(t)$, либо $\mathbf{A2}(t)$, $\mathbf{B2}(t)$.

Оптимальная стратегия управления определяется путем решения задачи оптимизации системы [22, 23]. В этой задаче рассматривается уравнение динамики состояний (43), где матрица $\mathbf{K}(t)$ представляет собой управляющее воздействие, а функционал (44) служит критерием качества.

В контексте данной задачи требуется минимизировать критерий (42) при динамических ограничениях, которые описываются разностным матричным уравнением (43). Для решения этой задачи применяется принцип максимума в матричной формулировке, который был разработан ранее в [3, 4].

Алгоритм поиска решения

1. Находим $\mathbf{Q}(t)$, $t = n, n-1, \dots, 1, 0$ из уравнения

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{B}(t) \times \\ \times (\mathbf{R}(t) - \mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{A}(t)) - \mathbf{h}^T \mathbf{h}.$$

2. Вычисляем $\mathbf{K}(t)$, $t = 0, 1, \dots, n-1$ в соответствии с формулой

$$\mathbf{K}(t) = (\mathbf{R}(t) - \mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{B}(t))^{-1} (\mathbf{B}^T(t)\mathbf{Q}(t+1)\mathbf{A}(t)).$$

3. По найденному $\mathbf{K}(t)$ вычисляем $\mathbf{S}(t)$, $t = 1, 2, \dots, n$,

$$\text{где } \mathbf{S}(t) = \begin{pmatrix} (V(t))^2 & V(t)F(t) \\ V(t)F(t) & (F(t))^2 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы $\mathbf{S}(t)$ и матрица $\mathbf{K}(t)$ являются искомым решением задачи слежения за эталонным портфелем.

Зная матрицу $\mathbf{S}(t)$, имеем:

$$F(t) = \sqrt{S_{22}(t)}; V(t) = S_{12}(t) / F(t),$$

где $V(t)$ – объем вложений в реальный портфель.

Управление портфелем вычисляем по формуле

$$\mathbf{u}(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)F(t).$$

4. Для вычисления объема вложения в портфель необходимо решить систему соотношений:

$$\mathbf{u}(t) = K_1(t)V(t) + K_2(t)F(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{z}(t), \quad t = \overline{0, n-1}; \quad (44) \\ \mathbf{z}(t+1) = \mathbf{A}(t)\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t).$$

Здесь для модели 1: $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A1}(t)$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B1}(t)$,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} V(t) \\ F(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} V''(t) \\ P(t) \end{pmatrix}; \quad \text{для модели 2:}$$

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{A2}(t), \mathbf{B}(t) = \mathbf{B2}(t), \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} V(t) \\ F(t) \end{pmatrix}, \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} V'(t) \\ P(t) \end{pmatrix}.$$

5. Объем вложений в БА вычисляем по формуле (33) (для модели 1)

$$V'(t) = V(t) - V''(t) + P(t)$$

либо объем вложений в РА вычисляем по формуле (38) (для модели 2)

$$V''(t) = V(t) - V'(t) + P(t).$$

6. Вычисляем доли РА и БА в портфеле

$$x_t = \begin{cases} [V'(t) / C'(t)], & \text{если } V'(t) \geq 0, \\ [|V''(t)| / (\lambda C''(t))], & \text{если } V'(t) < 0, \end{cases} \quad t = \overline{0, n}, \quad (45)$$

$$y_t = \begin{cases} [V''(t) / C''(t)], & \text{если } V''(t) \geq 0, \\ [|V'(t)| / (\mu C''(t))], & \text{если } V''(t) < 0, \end{cases} \quad t = \overline{0, n}. \quad (46)$$

Здесь $[\cdot]$ – целая часть числа.

РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Моделирование цен РА проводилось на основе смеси двух нормальных распределений с параметрами:

$$m1_j = C01 + h1 \cdot j, \quad j = \overline{0, 500}, \quad \sigma1;$$

$$m2_j = C02 + h2 \cdot j, \quad j = \overline{0, 500}, \quad \sigma2,$$

где $m1_j$, $m2_j$ – распределения цен; $C01$, $C02$ – начальная цена для соответствующего распределения; $h1$, $h2$ – возможные колебания цен при заданном объеме выборки; $\sigma1$, $\sigma2$ – среднеквадратические отклонения.

Значения параметров составили: $C01 = 100$, $C02 = 90$, $h1 = 0.04$, $h2 = 0.02$, $\sigma1 = 10$, $\sigma2 = 15$.

На рис. 3 приведены рассчитанные цены РА. Здесь и далее денежные величины показаны в условных единицах.

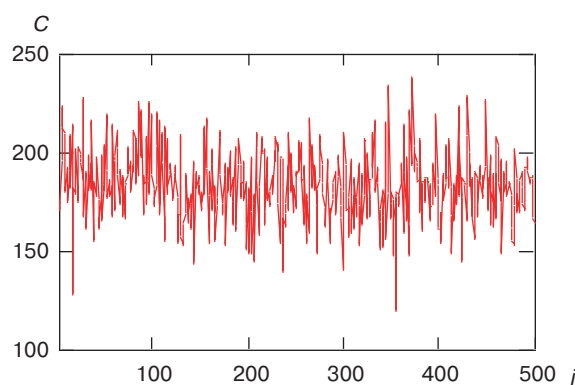


Рис. 3. Цены РА. C – цена РА, усл. ден. ед.;
j – количество реализаций

На рис. 4 приведено полученное вероятностное распределение цен РА.

Это распределение рассматривается как аналог эмпирического распределения. Затем на основе этого распределения моделируются цены РА в вершинах дерева. Вероятность роста цены была оценена на основе построенного распределения для разности цен $C''_i - C'_i$, $i = \overline{1, 500}$. Вероятность роста цены (вероятность того, что $C''_i - C'_i > 0$) составила $p = 0.495$.

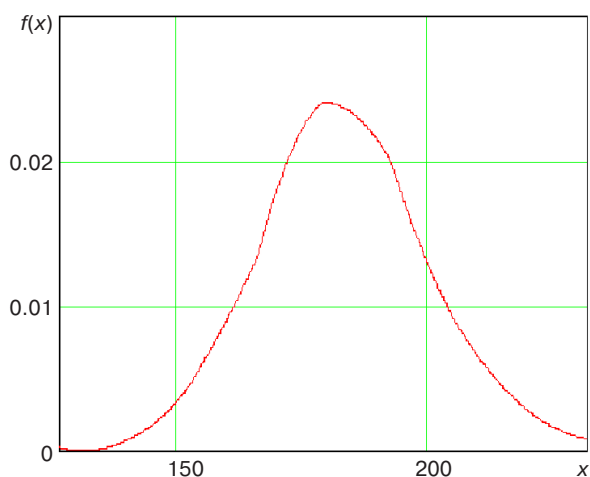


Рис. 4. Вероятностное распределение цен РА.
 $f(x)$ – плотность распределения вероятностей;
 x – цена РА, усл. ден. ед.

Значения остальных параметров были следующие: $C''(0) = 150$, $C'(0) = 10$, $\lambda = 1.02$, $\mu = 1.02$, $F(0) = 10000$, $V(0) = 10000$, $P(0) = 0$, $r_1(t) = 0.02$, $r_2(t) = 0.015$, $\mu_0(t) = 0.02$, глубина дерева $n = 5$.

Значения объемов вложений были взяты следующие. Для модели 1 $V'(0) = 10000$, $V''(0) = 0$, т.е. в начальный момент времени все средства были вложены в БА. Для модели 2 $V'(0) = 0$, $V''(0) = 10000$ – все средства вложены в РА.

Результаты моделирования приведены в табл. 1–5.

На рис. 5 приведены графики слежения за желаемой стоимостью портфеля. Здесь и далее на графиках время t указано в относительных единицах.

На рис. 6 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

Таблица 1. Глубина дерева до $n = 1$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	10340	1.028	-0.028	-0.368	11750	0.725	0.272	-35.890

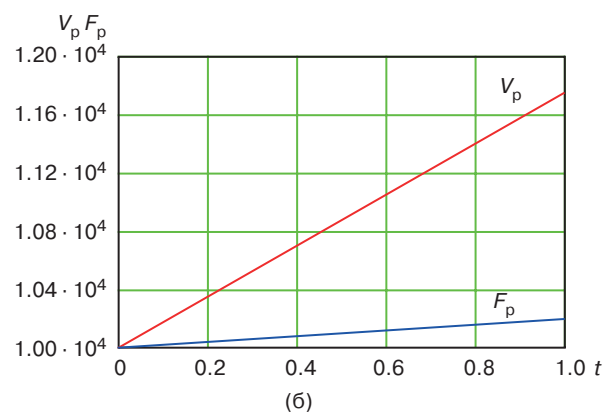
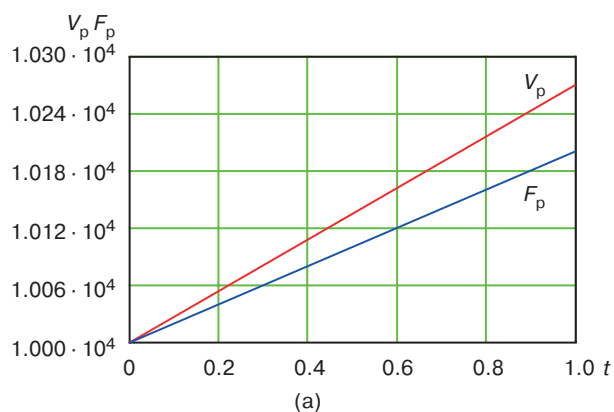


Рис. 5. Графики слежения: (а) модель 1, (б) модель 2. V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

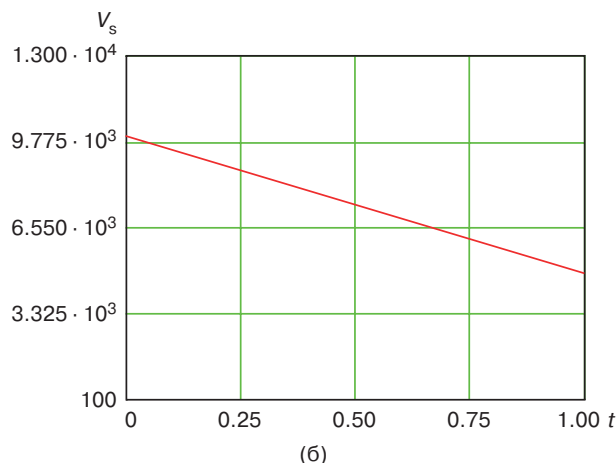
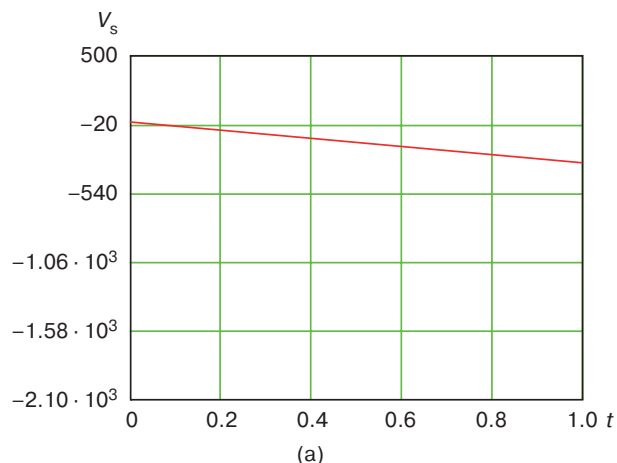


Рис. 6. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА:
(а) модель 1, (б) модель 2. V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

На рис. 7 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 8 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 9 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 10 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 11 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 12 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 13 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 14 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 15 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 16 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

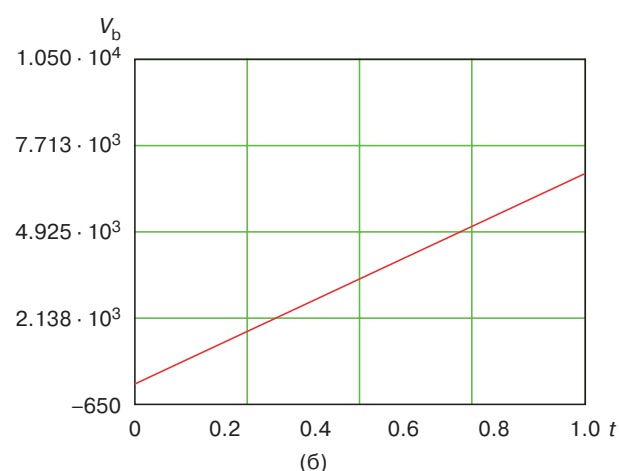
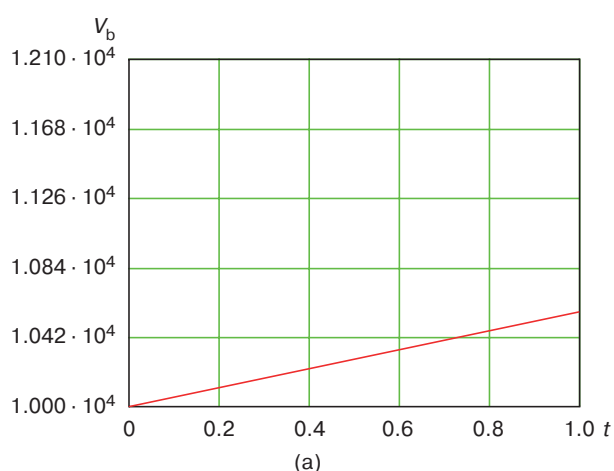


Рис. 7. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 2. Глубина дерева до $n = 2$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	10260	1.067	-0.067	-0.874	11400	0.427	0.568	-54.988
2	10690	1.079	-0.079	-1.089	11820	0.698	0.294	-93.140

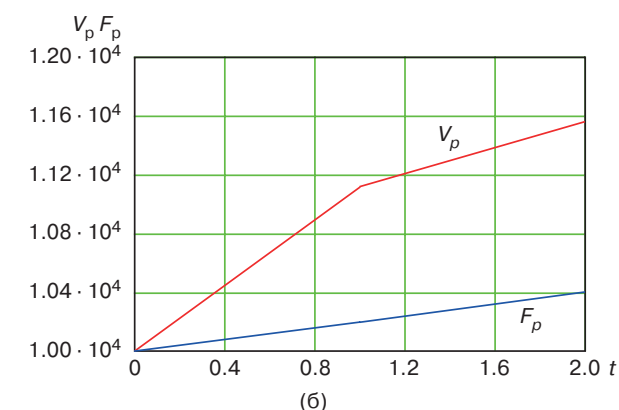
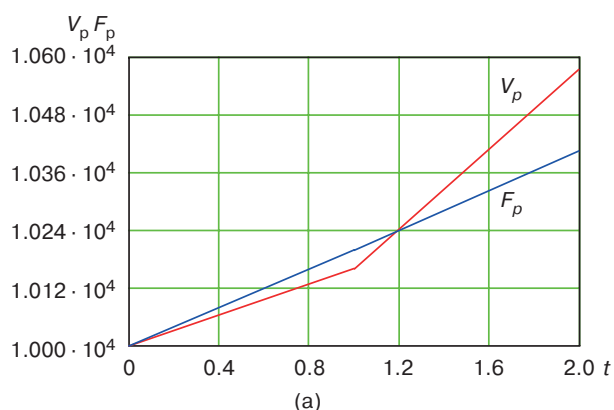


Рис. 8. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

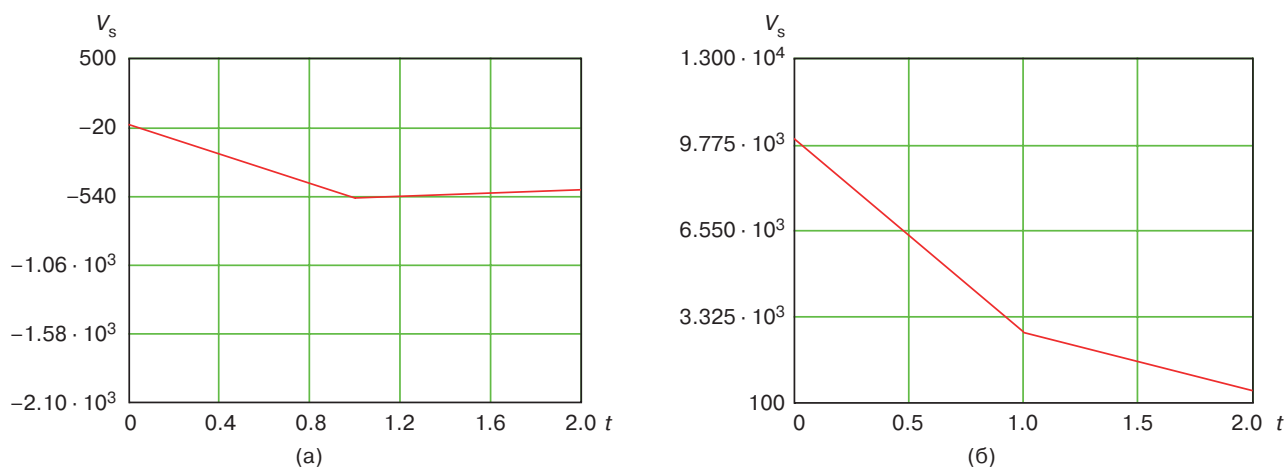


Рис. 9. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

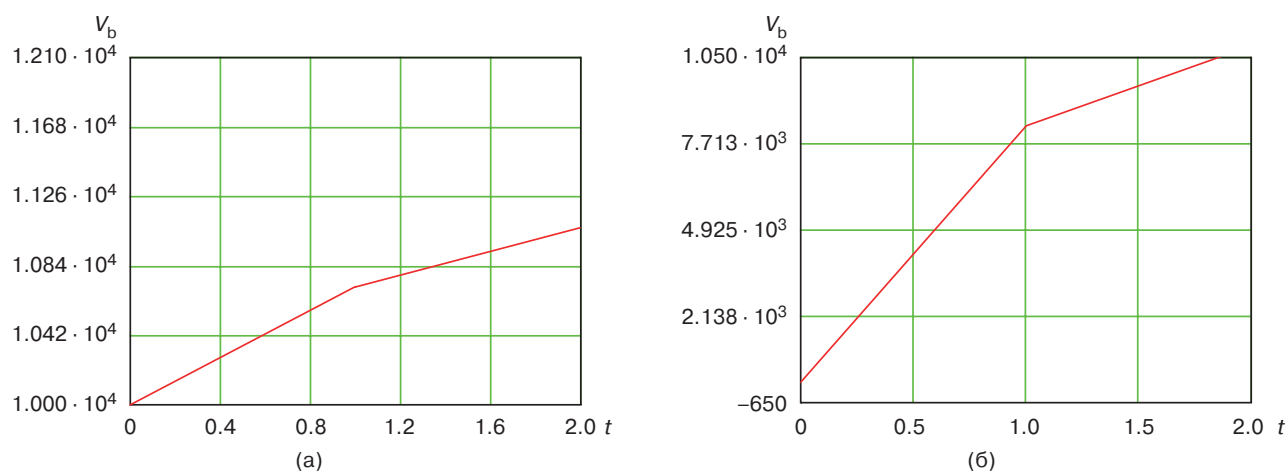


Рис. 10. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 3. Глубина дерева до $n = 3$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	10180	1.110	-0.111	-1.484	11190	0.538	0.456	-67.938
2	10610	1.100	-0.103	-1.450	11610	0.814	0.177	-106.597
3	11030	0.975	0.018	-2.705	11850	-0.024	1.024	-3.375

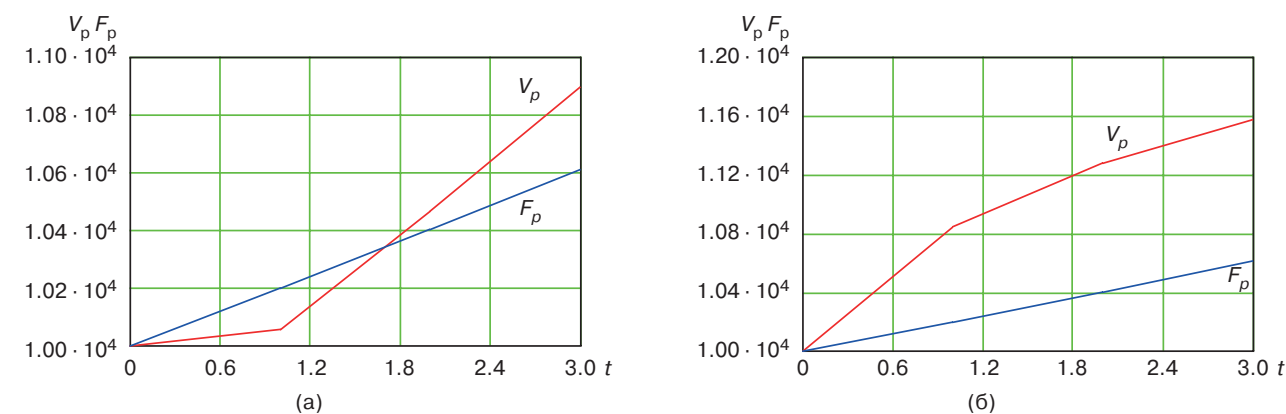


Рис. 11. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

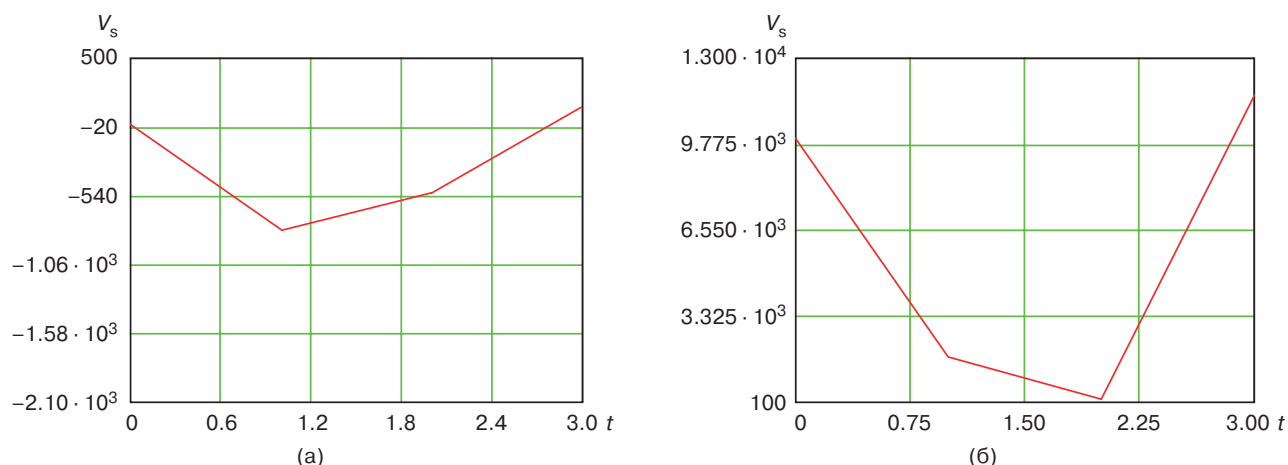


Рис. 12. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

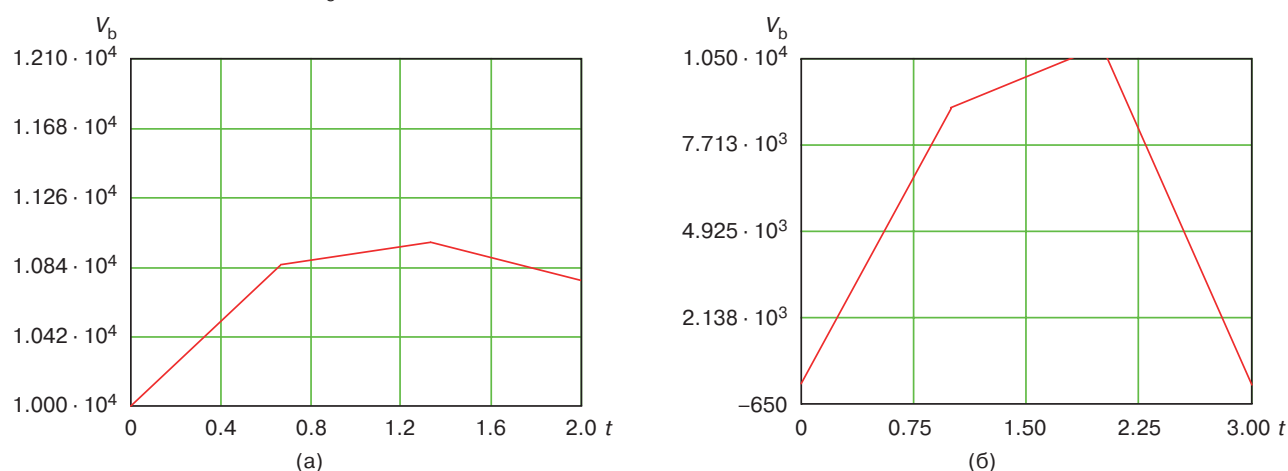


Рис. 13. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 4. Глубина дерева до $n = 4$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	$1 \cdot 10^4$	0	1	0
1	10080	1.159	-0.159	-2.078	$1.057 \cdot 10^4$	0.913	0.078	-100.38
2	10510	1.119	-0.119	-1.653	$1.1 \cdot 10^4$	0.977	0.013	-111.746
3	10930	0.970	0.030	-4.141	$1.124 \cdot 10^4$	-0.027	1.026	-1.617
4	11370	0.977	0.023	-3.411	$1.146 \cdot 10^4$	$3.502 \cdot 10^{-3}$	0.996	-3.804

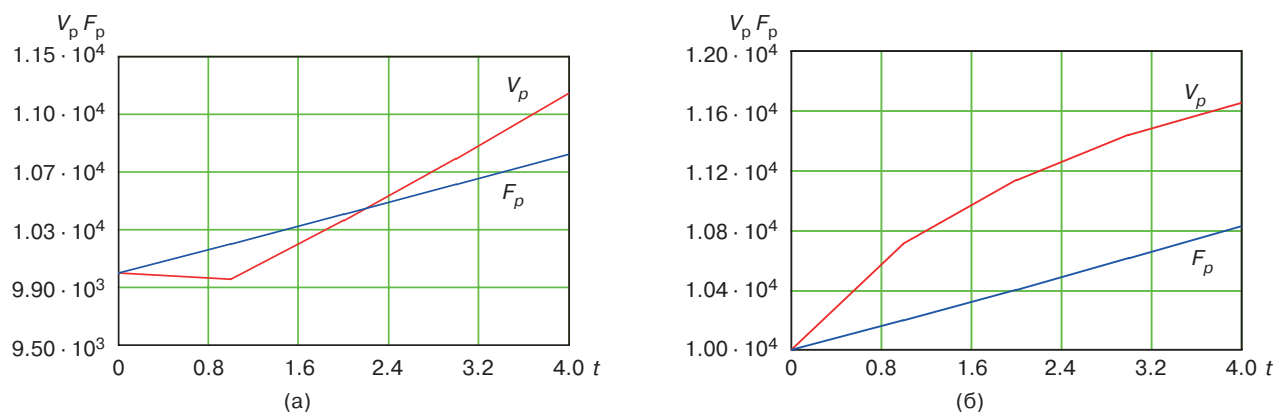


Рис. 14. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

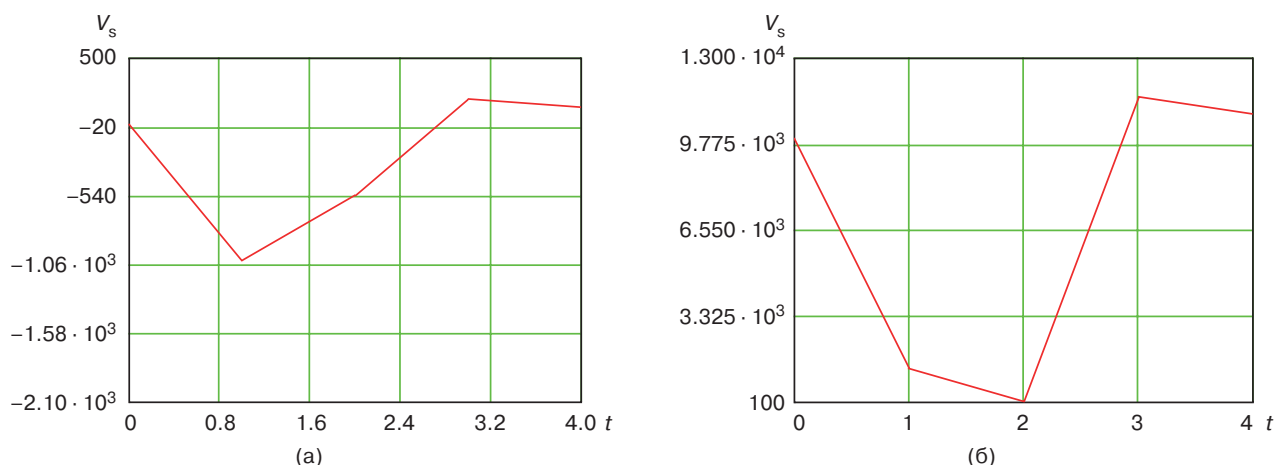


Рис. 15. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

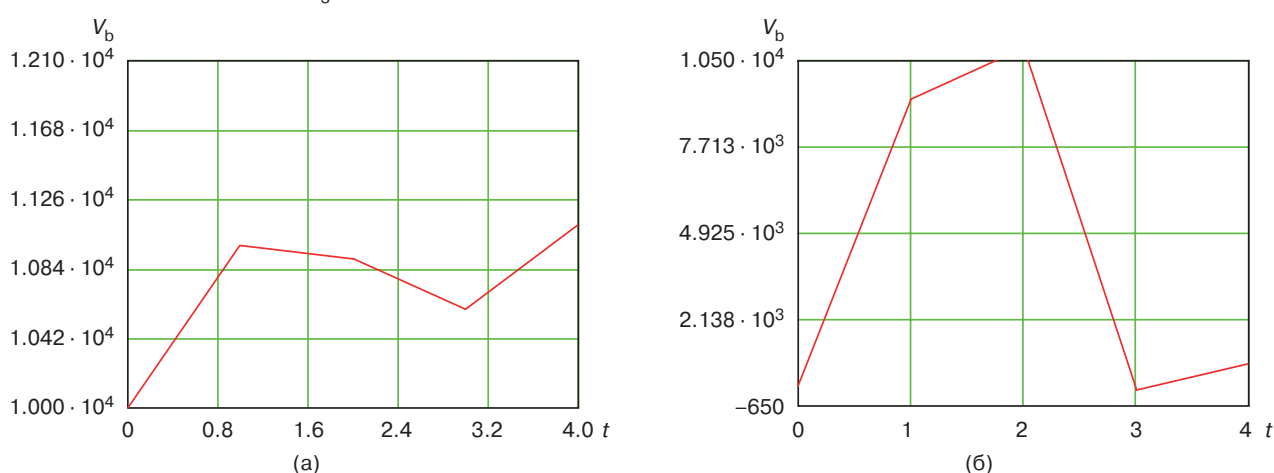


Рис. 16. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.
 V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Таблица 5. Глубина дерева до $n = 5$

Глубина дерева	Модель 1				Модель 2			
	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит	Объем вложений в портфель	Доля БА	Доля РА	Депозит
0	10000	1	0	0	10000	0	1	0
1	9815	1.095	-0.095	-0.379	10480	0.934	0.056	-101.88
2	10220	1.034	-0.034	-0.140	10910	0.979	0.011	-111.062
3	10630	0.971	0.028	-3.587	11130	-0.025	1.025	-2.593
4	11060	0.976	0.023	-3.602	11350	0.003	0.996	-4.519
5	11500	0.980	0.019	-2.986	11580	-0.01	1.01	-1.555

На рис. 17 приведены графики слежения за платежной функцией (желаемой стоимостью портфеля).

На рис. 18 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в РА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

На рис. 19 приведены графики необходимых изменений объемов вложений в БА для достижения стоимости портфеля не меньше желаемой.

Отрицательные доли вложений, которые наблюдаются в табл. 1–5, можно интерпретировать как «короткие продажи». Отрицательные доли депозита, присутствующие в табл. 1–5, означают заем средств. Такие результаты в рамках данной динамической модели объясняются тем, что не было наложено ограничений на объемы вложений и депозита.

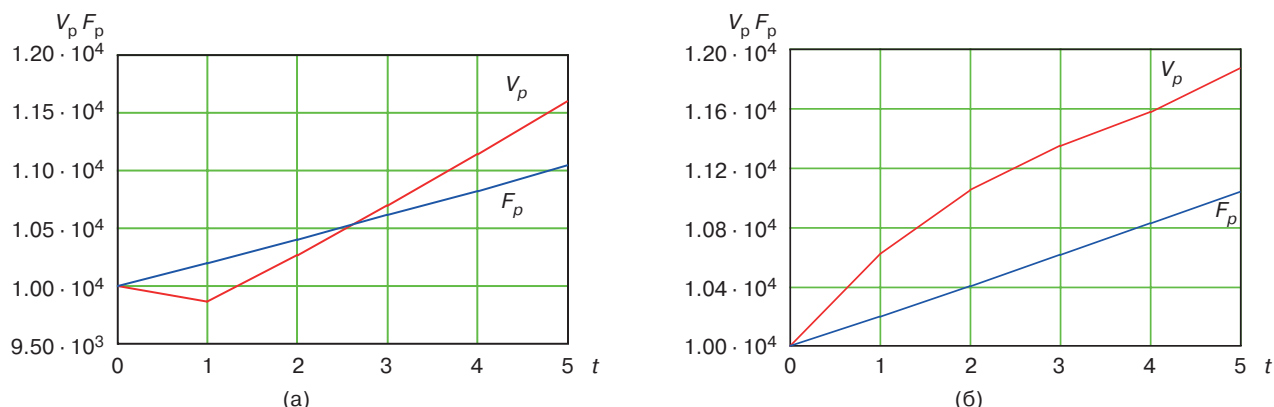


Рис. 17. Графики слежения за платежной функцией: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_p – объем вложений или капитал портфеля, усл. ден. ед.; F_p – платежная функция, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

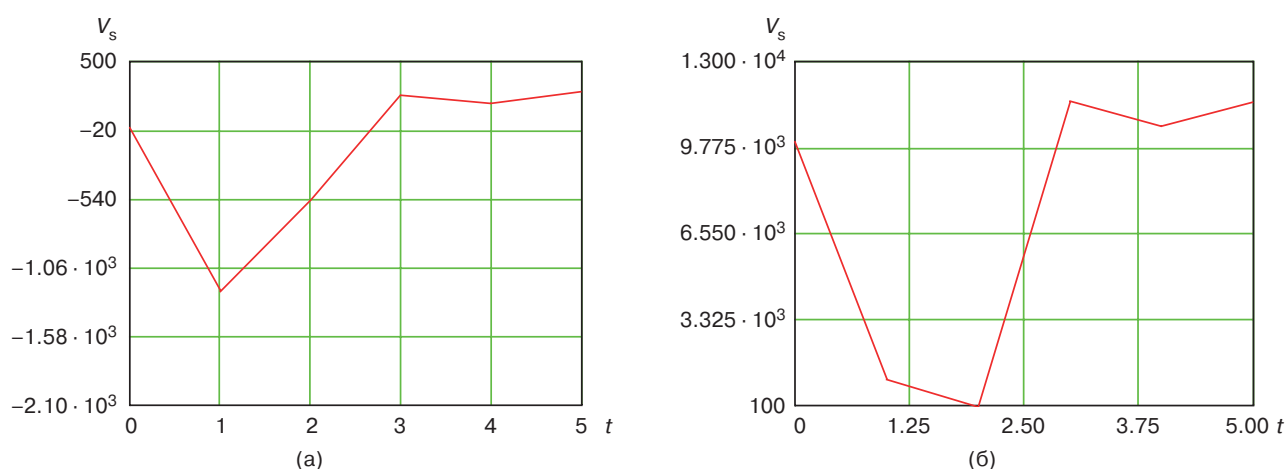


Рис. 18. Графики необходимых изменений объемов вложений в РА: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_s – объем вложений в РА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

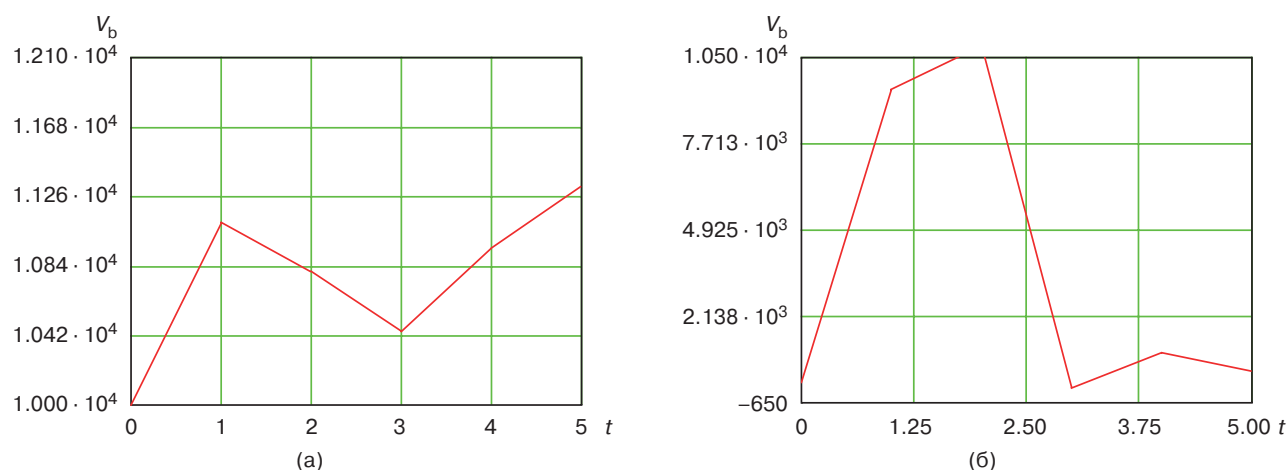


Рис. 19. Графики необходимых изменений объемов вложений в БА: (а) модель 1, (б) модель 2.

V_b – объем вложений в БА, усл. ден. ед.; t – время, усл. ед.

Видно, что переформирование портфеля по динамической модели позволяет обеспечивать заданный уровень платежной функции.

Представляет интерес сравнение погрешности динамической модели, основанной на древовидной структуре изменения цен РА, с общей моделью

изменения цен РА [13]. В табл. 6, 7 приведены погрешности оценки объемов вложений. Здесь σV – погрешность стоимости портфеля; σV_s – погрешность объема вложений в РА; σV_b – погрешность объема вложений в БА; σx – погрешность количества РА; σy – погрешность количества БА.

Таблица 6. Оценка погрешности модели 1

Глубина дерева / инвестиционный горизонт n	Древовидная структура цен РА			Естественное изменение цен РА			Выигрыш в точности модели		
	σV	σV_s	σV_b	$\sigma V1$	σV_s1	σV_b1	$\frac{\sigma V1}{\sigma V}$	$\frac{\sigma V_s1}{\sigma V_s}$	$\frac{\sigma V_b1}{\sigma V_b}$
1	6.44	61.5	61.7	15.4	84.9	83.3	2.4	1.4	1.3
2	12.3	26.3	21.9	21.25	37.0	34.0	1.7	1.4	1.6
3	18.64	417	410	39.0	581	575	2.1	1.4	1.4
4	25.1	340	354	61.49	625	654	2.4	1.8	1.8
5	26.9	234	238	73.7	552	556	2.7	2.4	2.3

Таблица 7. Оценка погрешности модели 2

Глубина дерева / инвестиционный горизонт n	Древовидная структура цен РА			Естественное изменение цен РА			Выигрыш в точности модели		
	σV	σV_s	σV_b	$\sigma V2$	σV_s2	σV_b2	$\frac{\sigma V2}{\sigma V}$	$\frac{\sigma V_s2}{\sigma V_s}$	$\frac{\sigma V_b2}{\sigma V_b}$
1	194.4	5003	302	339.7	875	531	1.7	1.7	1.7
2	210.3	52.8	157	366.2	98.2	269	1.7	1.9	1.7
3	370.3	981	637	743.6	1726	1083	2.0	1.8	1.7
4	367.8	560	493	781.0	1900	1959	2.1	3.4	4.0
5	370.0	559	280	843.2	1685	1288	2.3	3.0	4.6

Как следует из табл. 6, погрешность динамической модели на основе древовидной структуры изменения цен РА меньше, чем для обычной модели, причем с увеличением инвестиционного горизонта выигрыш в точности модели растет. Так для стоимости портфеля выигрыш в точности модели меняется от 2.4 ($n = 1$) до 2.7 ($n = 5$); для объема вложений в РА выигрыш в точности меняется от 1.4 ($n = 1$) до 2.4 ($n = 5$); для объема вложений в БА выигрыш в точности меняется от 1.3 ($n = 1$) до 2.3 ($n = 5$).

Выигрыш в точности наблюдается и для модели 2. Например, выигрыш в точности оценки стоимости портфеля составляет от 1.7 ($n = 1$) до 2.3 ($n = 5$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведен анализ портфеля ценных бумаг, который включал в себя активы с различными уровнями риска, активы без риска и депозиты. Для моделирования структуры цен РА использована биномиальная модель. Основная цель исследования заключалась в разработке модели управления, которая позволит отслеживать эталонный портфель. Для этого применен критерий качества в форме квадратичной функции, которая служила основой для построения модели управления. Разработанная модель относится к классу моделей динамического программирования, которые позволяют определить оптимальную стратегию управления, используя обратную связь.

В рамках исследования рассмотрены два подхода к формированию портфеля. Первый подход предполагает начальное вложение капитала в БА, а затем управление происходит через РА. Второй подход, наоборот, включает начальное вложение капитала в РА, а управление осуществляется через БА. Для оптимизации управления и достижения поставленной цели в исследовании применен линейный закон управления. Этот закон позволяет определить оптимальные значения управляющих параметров на основе текущего состояния системы и целевого значения эталонного портфеля.

В результате исследования сделан вывод, что применение динамической модели управления, основанной на древовидной структуре цен РА, позволяет значительно повысить точность оценки объема вложений в портфель. А именно, для первого подхода (модель 1) наблюдается увеличение точности оценки на уровне от 2.4 до 2.7 раз, а для второго подхода (модель 2) – от 1.7 до 2.7 раз.

Это означает, что разработанная модель может стать полезным инструментом для финансовых аналитиков и инвесторов, помогая им принимать более обоснованные решения при формировании и управлении портфелем ценных бумаг. Модель способствует более точному определению оптимального объема вложений, что может привести к повышению эффективности инвестиций и улучшению результатов для инвесторов.

Вклад авторов

А.А. Мицель – концепция, структура, научное руководство исследованием.

Е.В. Викторенко – анализ и интерпретация данных, подготовка и редактирование рукописи.

Authors' contributions

A.A. Mitsel – concept, structure, and scientific leadership of the study.

E.V. Viktorenko – analysis and interpretation of data, writing and editing the text of the manuscript.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Домбровский В.В., Ляшенко Е.А. Линейно-квадратичное управление дискретными системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами с применением к оптимизации инвестиционного портфеля. *Автоматика и телемеханика*. 2003;10:50–65.
2. Домбровский В.В., Ляшенко Е.А. Модель управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со стохастической волатильностью с учетом транзакционных издержек и ограничений. *Вестник Томского государственного университета*. 2006;S16:217–225.
3. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Управление с прогнозированием системами со случайными параметрами и мультипликативными шумами и применение к оптимизации инвестиционного портфеля. *Автоматика и телемеханика*. 2005;4:84–97.
4. Герасимов Е.С., Домбровский В.В. Динамическая сетевая модель управления инвестициями при квадратичной функции риска. *Автоматика и телемеханика*. 2002;2:119–128.
5. Домбровский В.И., Гальперин В.А. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем при квадратической функции риска. *Вестник Томского ГУ*. 2000;269:73–75.
6. Гальперин В.А., Домбровский В.И. Динамическое управление самофинансируемым инвестиционным портфелем при квадратической функции риска в дискретном времени. *Вестник Томского ГУ*. 2002;(S1-1):141–146.
7. Домбровский В.И., Гальперин В.А. Управление инвестиционным портфелем в непрерывном времени при квадратической функции риска. В сб.: *Труды Десятого юбилейного симпозиума по непараметрическим и робастным статистическим методам в кибернетике*. Томск: ТГУ; 2004. С. 185–192. <https://elibrary.ru/xwjka>
8. Гальперин В.А., Домбровский В.И. Динамическое управление инвестиционным портфелем с учетом скачкообразного изменения цен финансовых активов. *Вестник Томского ГУ*. 2003;280:112–117.
9. Домбровский В.В., Домбровский Д.В., Ляшенко Е.А. Динамическая оптимизация инвестиционного портфеля при ограничениях на объемы вложений в финансовые активы. *Вестник ТГУ*. 2008;1:13–17.
10. Домбровский В.В., Пашинская Т.Ю. Стратегии прогнозирующего управления инвестиционным портфелем на финансовом рынке со скрытым переключением режимов. *Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика*. 2020;50:4–13.
11. Гринёва Н.В. Динамическая оптимизация траектории управления инвестиционным портфелем. *Проблемы экономики и юридической практики*. 2021;17(3):73–77.
12. Ivanyuk V. Proposed Model of a Dynamic Investment Portfolio with an Adaptive Strategy. *Mathematics*. 2022;10(23):4394. <https://doi.org/10.3390/math10234394>
13. Мицель А.А., Красненко Н.П. Динамическая модель управления инвестиционным портфелем с линейным критерием качества. *Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники (Доклады ТУСУР)*. 2014;4(34):176–182.
14. Колясникова Е.Р. Хеджирующая стратегия в модели (B, S, F)-рынка. *Обозрение прикладной и промышленной математики*. 2009;16(3):467–468.
15. Бронштейн Е.М., Колясникова Е.Р. Модель (B, S, F)-рынка и хеджирующие стратегии. *Управление риском*. 2010;2:55–64.
16. Бронштейн Е.М., Колясникова Е.Р. Приближенные хеджирующие стратегии в модели (B, S, F)-рынка. *Математическое моделирование*. 2010;22(11):29–38.
17. Давнис В.В., Богданова С.Ю., Суюнова Г.Б. Модели (B, S)-рынка и риск-нейтральная цена опционов. *Вестник ОрёлГИЭТ*. 2010;1:134–140.
18. Давнис В.В., Федосеев А.М. Адаптивное моделирование (B, S)-рынка. *Современная экономика: проблемы и решения*. 2011;6(18):202–213.
19. Федосеев А.М., Коротких В.В. Особенности оценки стоимости опционов на полном и неполных рынках. *Современная экономика: проблемы и решения*. 2011;4(16):137–144.
20. Almeida C., Freire G. Pricing of index options in incomplete markets. *J. Fin. Economic*. 2022;144(1):174–205. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2021.05.041>
21. Давнис В.В., Коротких В.В. Эконометрические варианты модели (B, S, I)-рынка. *Современная экономика: проблемы и решения*. 2013;10(46):154–165. URL: <https://journals.vsu.ru/meps/article/view/7987>
22. Кротов В.Ф., Лагоша Б.А., Лобанов С.М., Данилов Н.И., Сергеев С.И. *Основы теории оптимального управления*. М.: Высшая школа; 1990. 430 с.
23. Athans M. The Matrix Minimum Principle. *Information and Control*. 1967;11(5–6):592–606. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(67\)90803-0](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)90803-0)

REFERENCES

1. Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization. *Autom. Remote Control*. 2003;64(10): 1558–1570. <https://doi.org/10.1023/A:1026057305653>
[Original Russian Text: Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. A Linear Quadratic Control for Discrete Systems with Random Parameters and Multiplicative Noise and Its Application to Investment Portfolio Optimization. *Avtomatika i telemekhanika*. 2003;10:50–65 (in Russ.).]
2. Dombrovskii V.V., Lyashenko E.A. Dynamic model of investment portfolio management in the financial market with stochastic volatility with regard transaction costs and restrictions. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J*. 2006;S16:217–225. (in Russ.).
3. Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Autom. Remote Control*. 2005;66(4):583–595. <https://doi.org/10.1007/s10513-005-0102-5>
[Original Russian Text: Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Predictive control of random-parameter systems with multiplicative noise. Application to investment portfolio optimization. *Avtomatika i telemekhanika*. 2005;4: 84–97 (in Russ.).]
4. Gerasimov E.S., Dombrovskii V.V. Dynamic network model of investment management control for quadratic risk function. *Autom. Remote Control*. 2002;63(2):280–288. <https://doi.org/10.1023/A:1014251725737>
[Original Russian Text: Gerasimov E.S., Dombrovskii V.V. Dynamic network model of investment management control for quadratic risk function. *Avtomatika i telemekhanika*. 2002;2:119–128 (in Russ.).]
5. Dombrovskii V.I., Galperin V.A. Dynamic model of investments portfolio selection by quadratic risk function. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J*. 2000;269:73–75 (in Russ.).
6. Galperin V.A., Dombrovskii V.I. Dynamic management of a self-financing investment portfolio with a quadratic risk function in discrete time. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J*. 2002;(S1-1):141–146 (in Russ.).
7. Dombrovskii V.I., Galperin V.A. Investment portfolio management in continuous time with a quadratic risk function. In: *Proceedings of the 10th Anniversary Symposium on Nonparametric and Robust Statistical Methods in Cybernetics*. Tomsk: TSU; 2004. P. 185–192 (in Russ.). <https://elibrary.ru/xwjxax>
8. Galperin V.A., Dombrovskii V.I. Dynamic management of an investment portfolio taking into account abrupt changes in prices of financial assets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J*. 2003;280:112–117 (in Russ.).
9. Dombrovskii V.V., Dombrovskii D.V., Lyashenko E.A. Dynamic optimization of the investment portfolio under restrictions on the volume of investments in financial assets. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta = Tomsk State University J*. 2008;1:13–17 (in Russ.).
10. Dombrovskii V.V., Pashinskaya T.Yu. Predictive control strategies for investment portfolio in the financial market with hidden regime switching. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie vychislitel'naya tekhnika i informatika = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2020;50:4–13 (in Russ.).
11. Grineva N.V. Dynamic optimization of the investment portfolio management trajectory. *Problemy ekonomiki i yuridicheskoi praktiki = Economic Problems and Legal Practice*. 2021;17(3):73–77. <https://doi.org/10.33693/2541-8025-2021-17-3-73-77>
12. Ivanyuk V. Proposed Model of a Dynamic Investment Portfolio with an Adaptive Strategy. *Mathematics*. 2022;10(23):4394. <https://doi.org/10.3390/math10234394>
13. Mitsel A.A., Krasnenko N.P. Dynamic model of investment portfolio management with linear criterion of quality. *Doklady Tomskogo gosudarstvennogo universiteta sistem upravleniya i radioelektroniki (Doklady TUSUR) = Proceedings of TUSUR University*. 2014;34:176–182 (in Russ.).
14. Kolyasnikova E.R. Hedging strategy in the (B, S, F)-market model. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki = OP&PM Surveys of Applied and Industrial Mathematics*. 2009;16(3):467–468 (in Russ.).
15. Bronshtein E.M., Kolyasnikova E.R. The (B, S, F)-market Model and hedging strategies. *Upravlenie riskom = Management of Risk*. 2010;2:55–64 (in Russ.).
16. Bronshtein E.M., Kolyasnikova E.R. Approximate hedging strategy in the (B, S, F)-market model. *Matematicheskoe modelirovanie = Math. Model*. 2010;22(11):29–38 (in Russ.).
17. Davnis V.V., Bogdanova S.Yu., Suyunova G.B. Models of (B, S)-market and risk-neutral price of options. *Vestnik OrelGIET = OrelSIET Bulletin*. 2010;1:134–140 (in Russ.).
18. Davnis V.V., Fedoseev A.M. Adaptive model-building of (B, S)-market. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern Economics: Problems and Solutions*. 2011;6(18):202–213 (in Russ.).
19. Fedoseev A.M., Korotkikh V.V. Features valuation of options on complete and incomplete markets. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern Economics: Problems and Solutions*. 2011;4(16):137–144 (in Russ.).
20. Almeida C., Freire G. Pricing of index options in incomplete markets. *J. Fin. Economic*. 2022;144(1):174–205. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2021.05.041>
21. Davnis V.V., Davnis V.V. Econometric options for the (B, S, I)-market models. *Sovremennaya ekonomika: problemy i resheniya = Modern Economics: Problems and Solutions*. 2013;10(46):154–165 (in Russ.). Available from URL: <https://journals.vsu.ru/meps/article/view/7987>

22. Krotov V.F., Lagosha B.A., Lobanov S.M., Danilov N.I., Sergeev S.I. *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya (Fundamentals of Optimal Control Theory)*. Moscow: Vysshaya shkola; 1990. 430 p. (in Russ.).
23. Athans M. The Matrix Minimum Principle. *Information and Control*. 1967;11(5–6):592–606. [https://doi.org/10.1016/S0019-9958\(67\)90803-0](https://doi.org/10.1016/S0019-9958(67)90803-0)

Об авторах

Мицель Артур Александрович, д.т.н., профессор, кафедра автоматизированных систем управления, ФГАОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (634050, Россия, Томск, пр-т Ленина, д. 40). E-mail: artur.a.mitsel@tusur.ru. Scopus Author ID 6603150769, ResearcherID G-8307-2014, SPIN-код РИНЦ 9698-2160, <https://orcid.org/0000-0002-2624-4383>

Викторенко Елена Владимировна, старший преподаватель, аспирант кафедры экономики, ФГАОУ ВО «Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники» (634050, Россия, Томск, пр-т Ленина, д. 40). E-mail: viktorenko.e@gmail.com. ResearcherID AEJ-4949-2022, SPIN-код РИНЦ 8664-3235, <https://orcid.org/0000-0003-3871-8993>

About the authors

Artur A. Mitsel, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Department of Automated Control Systems, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (40, Lenina pr., Tomsk, 634050 Russia). E-mail: artur.a.mitsel@tusur.ru. Scopus Author ID 6603150769, ResearcherID G-8307-2014, RSCI SPIN-code 9698-2160, <https://orcid.org/0000-0002-2624-4383>

Elena V. Viktorenko, Senior Lecturer, Postgraduate Student, Department of Economics, Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics (40, Lenina pr., Tomsk, 634050 Russia). E-mail: viktorenko.e@gmail.com. ResearcherID AEJ-4949-2022, RSCI SPIN-code 8664-3235, <https://orcid.org/0000-0003-3871-8993>