

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 621.391:53.08

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>

EDN GXAGAW



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Восстановление изображений с использованием дискретной функции рассеяния точки, получаемой с учетом конечности размера пикселя

В.Б. Федоров[@],
С.Г. Харламов,
А.В. Федоров

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

[@] Автор для переписки, e-mail: feodorov@mirea.ru

Резюме

Цели. Рассматривается задача восстановления расфокусированного и/или линейно смазанного изображения с использованием регуляризованного по Тихонову инверсного фильтра. Распространенным подходом к решению этой задачи является решение интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода типа свертки путем его дискретизации на основе квадратурных формул. Цель работы – получить выражение функции рассеяния точки (ФРТ) с учетом конечности размера пикселя и продемонстрировать его полезность.

Методы. Исследование основывается на теории сигналов и методе восстановления цифровых изображений с использованием тихоновской регуляризации.

Результаты. Получены формулы дискретной ФРТ как для случая расфокусированного, так и для случая линейно смазанного под произвольным углом изображения, с учетом конечности размера пикселя. Рассмотрены отличия полученных формул от традиционно используемых, показано при каких условиях эти отличия практически исчезают, а при каких – могут оказаться существенными.

Выводы. При восстановлении изображений на пределе разрешающей способности, т.е. когда размеры пикселя не могут считаться пренебрежимо малыми в сравнении с деталями изображения, предлагаемый подход может несколько улучшать разрешение. Кроме того, полученная формула дискретной ФРТ, соответствующей линейному смазу изображения в произвольно заданном направлении, позволяет не только решать задачу без необходимости предварительного поворота изображения, но и учитывать величину смаза с точностью до долей пикселя. Это дает преимущество в плане повышения разрешения предельно мелких деталей изображения и позволяет использовать данную формулу при решении задачи адаптивной деконволюции, когда требуется точная подстройка параметров ФРТ.

Ключевые слова: смазанное изображение, расфокусированное изображение, разрешающая способность, конечный размер пикселя, дискретная ФРТ, восстановление изображения, регуляризация по Тихонову, коэффициент регуляризации

• Поступила: 14.05.2024 • Доработана: 01.07.2024 • Принята к опубликованию: 30.01.2025

Для цитирования: Федоров В.Б., Харламов С.Г., Федоров А.В. Восстановление изображений с использованием дискретной функции рассеяния точки, получаемой с учетом конечности размера пикселя. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):143–154. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>, <https://elibrary.ru/GXAGAW>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Image restoration using a discrete point spread function with consideration of finite pixel size

Victor B. Fedorov[@],
Sergey G. Kharlamov,
Alexey V. Fedorov

MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

[@] Corresponding author, e-mail: feodorov@mirea.ru

Abstract

Objectives. The problem of restoring defocused and/or linearly blurred images using a Tikhonov-regularized inverse filter is considered. A common approach to this problem involves solving the Fredholm integral equation of the first convolution type by means of discretization based on quadrature formulas. The work sets out to obtain an expression of the point scattering function (PSF) taking into account pixel size finiteness and demonstrate its utility in application.

Methods. The research is based on signal theory and the method of digital image restoration using Tikhonov regularization.

Results. Taking into account the finiteness of the pixel size, discrete PSF formulas are obtained both for the case of a defocused image and for the case of a linearly blurred image at an arbitrary angle. It is shown that, while differences between the obtained formulas and those traditionally used are not significant under some conditions, under other conditions they can become significant.

Conclusions. In the case of restoring images at the resolution limit, i.e., when the pixel size cannot be considered negligibly small compared to the details of the image, the proposed approach can slightly improve the resolution. In addition, the derived formula for the discrete PSF corresponding to linear blur in an arbitrarily specified direction can be used to solve the problem without the need for prior image rotation and account for the blur value with sub-pixel accuracy. This offers an advantage in terms of improving the resolution of extremely fine details in the image, allowing the obtained formula to be used in solving the adaptive deconvolution problem, where precise adjustment of PSF parameters is required.

Keywords: blurred image, defocused image, resolution limit, finite pixel size, discrete PSF, image restoration, Tikhonov regularization, regularization parameter

• Submitted: 14.05.2024 • Revised: 01.07.2024 • Accepted: 30.01.2025

For citation: Fedorov V.B., Kharlamov S.G., Fedorov A.V. Image restoration using a discrete point spread function with consideration of finite pixel size. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):143–154. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-143-154>, <https://elibrary.ru/GXAGAW>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире качество изображения объектов имеет решающее значение во многих областях, включая медицинскую визуализацию, астрономию, дистанционное зондирование Земли со спутников, контроль безопасности и видеонаблюдение. Рост потребности в высококачественных изображениях ставит перед исследователями задачу улучшения методов их восстановления и обработки. Одной из основных проблем в этом контексте является восстановление изображений, искаженных из-за равномерного прямолинейного движения объекта или камеры, что приводит к линейному смазу, а также из-за расфокусировки.

Данная работа является продолжением исследований авторов [1], в ней исследуется вопрос восстановления линейно-смазанного или расфокусированного изображения применительно к случаю, когда параметры смаза известны. К настоящему времени этой проблеме посвящено уже довольно много работ. Так теории решения обратных некорректных задач, к числу которых относится задача восстановления изображений, посвящены фундаментальные работы [2–5]. Непосредственно решению задачи восстановления изображений посвящены основополагающие работы [6–10], изданные еще до начала 90-х гг. прошлого века. В работах [11–15] отражено современное состояние дел в этой области. Во всех перечисленных работах используются выражения функции рассеяния точки (ФРТ), предполагающие бесконечную малость размера пикселя. В отличие от этого, авторами данной работы получены выражения ФРТ, которые учитывают конечность размеров пикселя, что дает следующие преимущества. Прежде всего, при восстановлении изображений, полученных на пределе разрешающей способности фотоаппарата, когда размеры пикселя не могут считаться пренебрежимо малыми по сравнению с деталями изображения, учет конечности размера пикселя позволяет несколько улучшить качество восстановления. Это справедливо как в случае восстановления линейного смазанного, так и в случае расфокусированного изображения. Кроме того, полученные выражения ФРТ непрерывно зависят от параметров смаза, что позволяет легко подстраивать эти параметры

под необходимые величины с точностью до долей пикселя. В частности, легко осуществлять точный выбор величины и направления линейного смаза.

Целью работы является демонстрация преимуществ предлагаемой модели дискретной ФРТ, учитывающей конечность размеров пикселя. Статья содержит строгий математический вывод указанных формул ФРТ, их сравнение с традиционными подходами. Полученные теоретические результаты подкреплены численным моделированием исследуемых искажений и их устранением через деконволюцию с использованием регуляризации по А.Н. Тихонову.

1. ДВУМЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФРТ ПРИ ЛИНЕЙНОМ СМАЗЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ

Рассмотрим прямоугольную панель светочувствительных элементов, представляющую собой матрицу размером $M \times N$ пикселей. Будем считать, что пиксели имеют квадратную форму и сплошь, без зазоров заполняют всю панель; пусть w – размер пикселя. Каждому пикселю припишем пару индексов (m, n) , $m \in \overline{0, M-1}$; $n \in \overline{0, N-1}$, при этом пиксель в левом верхнем углу панели будет иметь индексы $(0, 0)$. Свяжем с этой панелью декартову систему координат Ox с началом в левом верхнем углу панели, так что центр пикселя с индексами (m, n) находится в точке с координатами $(mw + w/2, nw + w/2)$, ось Ox направим вертикально вниз, а ось Oy – вертикально вправо.

Пусть функция $p(x, y)$ определяет поле яркостей точек панели, создаваемое световым потоком, формирующим изображение, в некоторый момент времени t . Функцию $p(x, y)$ естественно считать независимой от t . Тогда световая энергия, накапливаемая пикселем с индексами (m, n) за время экспозиции τ , от движущегося относительно панели изображения (сфокусированного светового потока) равна

$$q[m, n] = \int_{mw}^{(m+1)w} dx \int_{nw}^{(n+1)w} dy \int_0^{\tau} p(x - v_x(x, y)t, y - v_y(x, y)t) dt,$$

где $(v_x(x, y), v_y(x, y))$ – декартовы компоненты вектора скорости движения точки изображения

с координатами (x, y) . Здесь пока рассматривается общий случай, когда разные точки изображения могут двигаться с разными скоростями.

Поле яркостей можно представить двумерным интерполяционным рядом Котельникова:

$$p(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{w} - m\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{y}{w} - n\right), \quad (1)$$

где $p[m, n] = p(mw, nw)$.

Подставив это выражение в интеграл, получим:

$$q[k, l] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_{k,l}[k - m, l - n] p[m, n],$$

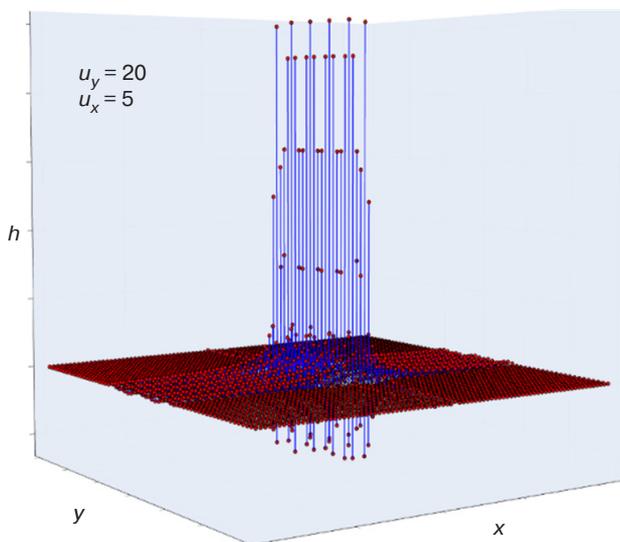
где

$$\begin{aligned} h_{k,l}[m, n] &= \\ &= w^2 \int_0^\tau \operatorname{sinc}\left(m - \frac{v_x(kw, lw)t}{w}\right) \operatorname{sinc}\left(n - \frac{v_y(kw, lw)t}{w}\right) dt = \\ &= w^2 \tau \int_0^1 \operatorname{sinc}\left(m - \frac{v_x(kw, lw)\tau}{w} t\right) \operatorname{sinc}\left(n - \frac{v_y(kw, lw)\tau}{w} t\right) dt. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в пределах одного пикселя поле скоростей движения изображения можно считать практически постоянным и равным его значению в левом верхнем углу пикселя; при этом множитель $w^2\tau$ далее будем считать равным единице.

Если поле скоростей постоянно в пределах всей матрицы пикселей, то получаем двумерную свертку

$$q[k, l] = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h[m, n] p[k - m, l - n], \quad (2)$$



где ядро этой свертки определено формулой

$$h[m, n] = \int_0^1 \operatorname{sinc}(m - u_x t) \operatorname{sinc}(n - u_y t) dt, \quad (3)$$

$u_x = v_x \tau / w$, $u_y = v_y \tau / w$ – компоненты смещения, заданные в пикселях, за время экспозиции.

При $u_x = u_y = 0$ имеем $h[m, n] = \operatorname{sinc}(m) \operatorname{sinc}(n) = \delta[n] \delta[m]$, как и должно быть.

На рис. 1 показаны примеры графиков дискретного ядра, рассчитываемого по формуле (3).

С учетом конечности размеров матрицы пикселей в общем случае имеем двумерную конечную свертку:

$$q[m, n] = \sum_{k=0}^{\min(m, K-1)} \sum_{l=0}^{\min(n, L-1)} h[k, l] p[m - k, n - l], \quad (4)$$

где $m \in \overline{0, M-1}$; $n \in \overline{0, N-1}$ и считается, что массив $p[:, :]$ имеет размеры $M \times N$; массив $h[:, :]$ – размеры $K \times L$ и массив $q[:, :]$ – размеры $(M + K) \times (N + L)$.

В частности, при $u_x = 0$ (смещения по вертикали нет)

$$h[m, n] = \delta[m] \int_0^1 \operatorname{sinc}(n - u_y t) dt,$$

где $\delta[m]$ – дискретная дельта-функция, т.е. при отсутствии вертикальной составляющей скорости двумерная свертка фактически сводится к одномерной с ядром

$$h[n] = \int_0^1 \operatorname{sinc}(n - u_y t) dt.$$

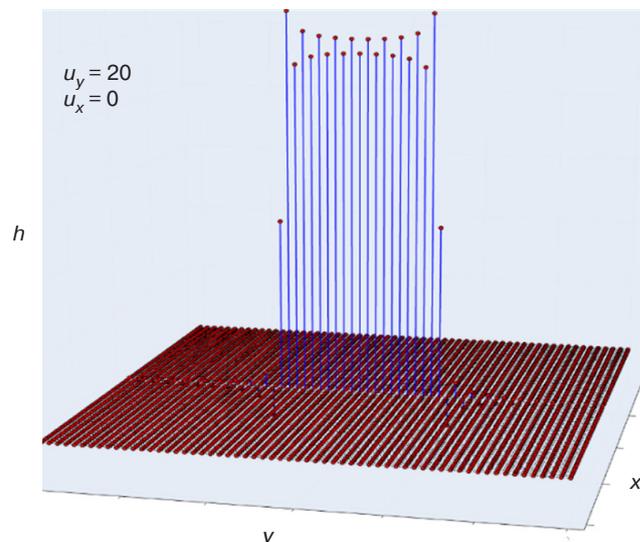


Рис. 1. Примеры графиков двумерного дискретного ядра линейного смаза, рассчитываемого по формуле (3)

При этом, с учетом конечности размеров матрицы пикселей, имеем

$$q[k] = \sum_{m=0}^{\min(k, M-1)} h[m]p[k-m],$$

где $k \in \overline{0, M-1}$.

Если в правую часть формулы (3) добавить множитель $1/w^2$ и затем перейти к пределу при $w \rightarrow 0$, считая при этом, что ядро зависит не от целочисленных индексов m, n , а от соответствующих им непрерывных переменных $x = mw, y = nw$, то получим формулу вида:

$$h(x, y) = \int_0^1 \delta(x - v_x \tau t) \delta(y - v_y \tau t) dt.$$

Такая формула встречается в литературе по оптике (см., например, [16]), но непосредственно в таком виде она непригодна для дискретизации. Дискретизировать ее можно только, если заменить входящую в нее дельта-функцию подходящей регулярной функцией; такая замена на масштабированную функцию sinc возвращает к формуле (3). Возможен, однако, и несколько иной путь преобразований с целью получения выражения, пригодного для дискретизации:

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} I_{(0;1)}(t) \delta(x - v_x \tau t) \delta(y - v_y \tau t) dt = \\ &= I_{(0;1)} \left(\frac{y}{v_y \tau} \right) \delta \left(x - \frac{v_x}{v_y} y \right), \end{aligned}$$

где $I_{(0;1)}(y)$ – индикаторная функция интервала (0; 1). Отсюда ввиду того, что в пространстве функций с финитным частотным спектром масштабированная соответствующим образом функция sinc играет роль дельта-функции Дирака, получаем, что

$$h(x, y) = I_{(0;v_y \tau)}(y) \operatorname{sinc} \left(\frac{1}{w} \left(x - \frac{v_x}{v_y} y \right) \right).$$

Появляющийся при такой замене масштабный коэффициент $1/w$ для удобства был отброшен. Теперь, снова полагая $x = mw, y = nw$, получим дискретный аналог последней формулы

$$h[m, n] = hu_y[n] \operatorname{sinc} \left(m - \frac{u_x}{u_y} n \right), \quad (5)$$

где $u_y = \frac{v_y \tau}{w} \in \mathbb{N}$, $hu_y[n]$ – функция целочисленного аргумента при крайних значениях аргумента $n = 0, u_y$, равная $1/2$; равная 1 при $n = 1, 2, \dots, u_y - 1$; равная 0 при всех остальных n , что соответствует квадратурной формуле трапеций.

Здесь важно подчеркнуть, что в формуле (5) величина горизонтального смаза u_y предполагается целой положительной величиной, в то время как на величину вертикальной составляющей смаза u_x такого ограничения данная формула уже не накладывает, величина u_x в ней может принимать любые вещественные значения.

В частности, если в (5) положить $u_x = 0$, то с учетом тождества $\operatorname{sinc}(m) = \delta[m]$ имеем $h[m, n] = h_{u_y}[n] \delta[m]$. Поскольку $\delta[m]$ отлична от нуля лишь при $m = 0$, то двумерное ядро $h[m, n]$ заменяется одномерным ядром $h_{u_y}[n]$, которое чаще всего и используется в литературе для описания горизонтального линейного смаза (см. например, [8, 14, 15]).

Формула (5) может рассматриваться как альтернатива формуле (3), она также, как и формула (3), позволяет восстанавливать линейно смазанное изображение при произвольном направлении смаза. Однако в отличие от формулы (5), формула (3) снимает ограничения на значения величины горизонтального смаза u_y , которое в формуле (3) уже может быть любым вещественным числом, также как и величина вертикальной составляющей смаза u_x . Это дает следующие преимущества при использовании формулы (3). Во-первых, как было показано в [1], при восстановлении изображения на пределе разрешающей способности учет реальной величины смаза с точностью до долей пикселя может повышать разрешение деталей восстанавливаемого изображения. Во-вторых, если иметь в виду применение рассматриваемого метода восстановления изображения в качестве основы для решения задачи адаптивной деконволюции, когда направление и величина смаза известны не точно, то дискретность параметра, определяющего величину горизонтального смаза, может быть препятствием.

2. ДВУМЕРНАЯ ДИСКРЕТНАЯ ФРТ ПРИ РАСФОКУСИРОВКЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Для простоты рассмотрим модель, в которой изображение расфокусируется по гауссовскому закону. Хотя для оптических систем высокого качества, таких как телескопы и микроскопы, гауссовская модель обычно не используется, она позволяет продемонстрировать сам метод построения дискретной ФРТ с учетом конечности размеров пикселя. Также гауссовская расфокусировка часто используется именно

в демонстрационных целях (см., например, [14]). При необходимости гауссовская функция может быть заменена любой другой, например, функцией Эйри, которая соответствует случаю, когда дифракция является единственной причиной расфокусировки. Принципиальных ограничений здесь нет.

Пусть функция $p(x, y)$ – интенсивность светового потока, попадающего в апертуру объектива. Тогда, вследствие предполагаемой расфокусировки этого потока, на светочувствительной панели поле яркостей точек определяется интегралом свертки

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi(\sigma w)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x-u, y-v) e^{-\frac{u^2+v^2}{2\pi(\sigma w)^2}} dudv,$$

формирующим изображение в течение времени экспозиции τ , где σ – параметр, определяющий степень расфокусировки, w – размер пикселя.

Подставляя в этот интеграл выражение (1), получим:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 w^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{x-u}{w} - m\right) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2 w^2}} \times \\ &\times du \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{y-v}{w} - n\right) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2 w^2}} dv \end{aligned}$$

Откуда, полагая $x = wl$, $y = wk$, $k, l \in \mathbb{Z}$, имеем:

$$\begin{aligned} q(k, l) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2 w^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(k - m - \frac{u}{w}\right) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2 w^2}} du \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(l - n - \frac{v}{w}\right) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2 w^2}} dv. \end{aligned}$$

Если в полученной формуле перейти к пределу при $w \rightarrow 0$, то с учетом того, что $\operatorname{sinc}(x/w)/w \rightarrow \delta(x)$, приходим к дискретной свертке изображения $p[m, n]$ с традиционным ядром, представляющим собой сеточную гауссовскую функцию. А именно, в пределе получается традиционно используемое в этой задаче ядро дискретной свертки

$$h_{(w \rightarrow 0)}[m, n] = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}}.$$

Если же не переходить к пределу, то заменяя в последних двух интегралах переменные u/w и v/w , на u и v соответственно, получим:

$$\begin{aligned} q(k, l) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p[m, n] \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(k - m - u) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(l - n - v) e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} dv. \end{aligned}$$

Таким образом, как и в случае линейного смаза, имеем двумерную дискретную свертку вида (2), при этом в случае расфокусировки соответствующее ядро оказывается разделимым

$$h[m, n] = h_1[m]h_1[n], \quad (6)$$

где

$$h_1[k] = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}(k - u) e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du = (\operatorname{sinc} * g)(k),$$

$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}$, звездочка здесь обозначает операцию одномерной аналоговой свертки.

Рассмотрим свертку $f(z) = (\operatorname{sinc} * g)(z)$. По теореме о свертке преобразование Фурье функции $f(z)$

$$F(v) = I_{(-0.5; 0.5)}(v) e^{-2\pi^2(v\sigma)^2},$$

где учтено, что Фурье-образ функции $\operatorname{sinc}(z)$ – это индикаторная функция интервала $(-0.5; 0.5)$, а Фурье-образ гауссовской функции $g(z)$ – это есть функция $\frac{1}{\pi} e^{-2(v\sigma)^2}$. Убедиться в последнем можно, вспомнив, что Фурье-образ функции $e^{-\pi(z/\lambda)^2} / \lambda$ есть функция $e^{-\pi(v/\lambda)^2}$ (в нашем случае $\lambda = \sqrt{2\pi}\sigma$).

Так как $h_1[k]$ есть Фурье-оригинал функции $F(v)$ в точке $z = k$, то имеем:

$$\begin{aligned} h_1[k] &= \int_{-0.5}^{0.5} e^{-2(\pi v\sigma)^2} e^{i2\pi vk} dv = \\ &= \int_{-0.5}^{0.5} e^{-2(\pi v\sigma)^2} \cos(2\pi vk) dv. \end{aligned} \quad (7)$$

Последнее равенство имеет место в силу того, что мнимая часть этого интеграла заведомо должна

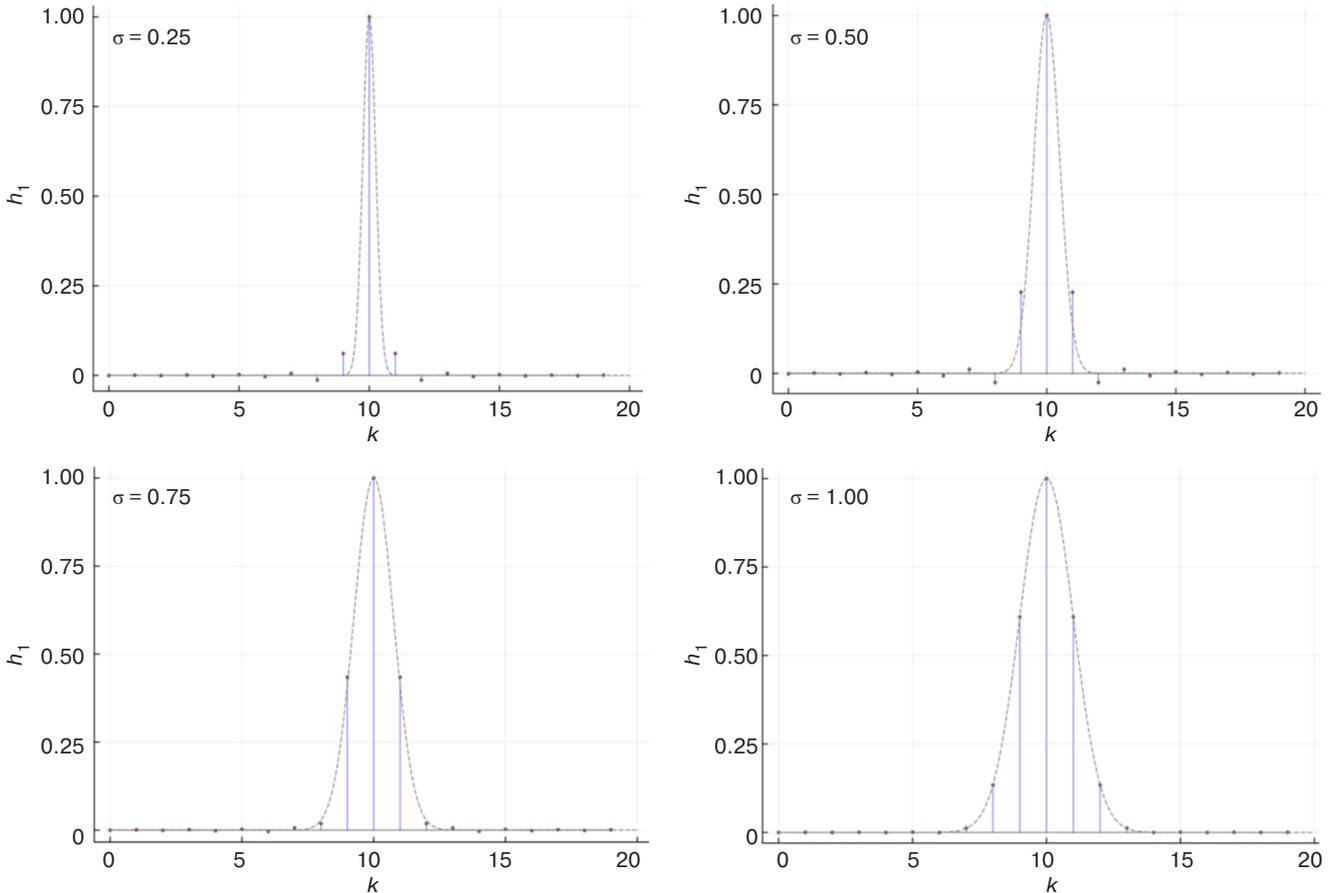


Рис. 2. Примеры графиков одномерного ядра (нормированного на максимум), соответствующего гауссовской расфокусировке; пунктиром показаны графики гауссовских кривых, которые дают предельные значения ядра при $w \rightarrow 0$

быть равна нулю; можно убедиться в этом и непосредственно – в мнимой части под интегралом будет нечетная функция. В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ имеем $h_1[k] = \delta[k]$. На рис. 2 приведены графики одномерного ядра (7) при различных значениях параметра σ , из которых видно, что уже при $\sigma = 1.0$ значения ядра (7) практически не отличаются от предельных значений при $w \rightarrow 0$.

3. ОБРАЩЕНИЕ СВЕРТКИ

Рассмотрим уравнение (4), представляющее собой конечную двумерную линейную (по каждому измерению) дискретную свертку. Для решения этого уравнения будет использоваться дискретное преобразование Фурье (ДПФ; имеется ввиду двумерное ДПФ). Для этого рассматриваемую линейную свертку сначала необходимо представить в виде циклической свертки следующим образом.

$$q[m, n] = \sum_{k=0}^{M+K-1} \sum_{l=0}^{N+L-1} h[k, l] p[(m-k)_{M+K}, (n-l)_{N+L}], \quad (8)$$

где $(m-k)_{M+K}, (n-l)_{N+L}$ – вычеты по модулю $M+K$ и по модулю $N+L$ соответственно, $m \in \overline{0, (M+K-1)}$, $n \in \overline{0, (N+L-1)}$, и считается, что все массивы имеют равные размеры $(M+K) \times (N+L)$. Для этого в массив $h[:, :]$ потребовалось добавить M нулевых строк и N нулевых столбцов, а в массив $p[:, :]$ – K нулевых строк и L нулевых столбцов (нулевые строки и столбцы можно добавлять, например, в число последних строк и столбцов).

Тогда, в соответствии с теоремой о дискретной циклической свертке, имеем:

$$Q[m, n] = H[m, n]P[m, n], \quad (9)$$

где $m \in \overline{0, (M+K-1)}$, $n \in \overline{0, (N+L-1)}$; $H[:, :] = \text{fft}(h[:, :])$, $Q[:, :] = \text{fft}(q[:, :])$, $P[:, :] = \text{fft}(p[:, :])$ – двумерные ДПФ соответствующих массивов.

Задача обращения свертки состоит в том, чтобы при заданном массиве $q[:, :]$ решить уравнение (8) относительно массива $p[:, :]$. Эта задача, как известно, является плохо обусловленной, т.е. очень чувствительной к погрешностям в исходных данных и к шумам. Поэтому непосредственно использовать

соотношение (9) для ее решения не получится, тут потребуется применение специальных методов регуляризации [2–8]. Будем использовать метод регуляризации по А.Н. Тихонову, состоящий в том, что вместо непосредственного обращения формулы (9) рассматривается обращенная формула с регуляризующим членом

$$P[m, n] = \frac{\overline{H[m, n]}}{|H[m, n]|^2 + \alpha(R[m, n])^s} Q[m, n], \quad (10)$$

где $\alpha \geq 0$ – параметр регуляризации, который должен подбираться для достижения максимального качества восстанавливаемого изображения ($\alpha = 0$ означает отсутствие регуляризации), $R[:, :]$ – массив, соответствующий некоторой выбранной регуляризующей функции, $s \geq 0$ – порядок регуляризации. Регуляризующая функция и порядок регуляризации подбираются в каждом случае индивидуально.

Например, регуляризующий массив $R[:, :]$ может вычисляться так:

$$R[m, n] = R_1[m] + R_2[n], \quad (11)$$

где

$$R_1[m] = \begin{cases} \pi \left(\frac{m}{M+K} \right)^2, & \overline{m \in 0, (M+K)/2 - 1}, \\ R_{M+K} \left[m - \frac{M+K}{2} \right], & \overline{m \in (M+K)/2 - 1, (M+K) - 1}, \end{cases}$$

$$R_2[n] = \begin{cases} \pi \left(\frac{n}{N+L} \right)^2, & \overline{n \in 0, (N+L)/2 - 1}, \\ R_{N+L} \left[n - \frac{N+L}{2} \right], & \overline{n \in (N+L)/2 - 1, (N+L) - 1} \end{cases}$$

(если здесь какое-либо из чисел $M+K$ или $N+L$, нечетное, то под делением этого числа на 2 понимается целая часть от такого деления), или так:

$$R[:, :] = \text{fft}(\Delta[:, :]), \quad (12)$$

где $\Delta[:, :]$ – какая-либо разностная аппроксимация двумерного дифференциального оператора Лапласа (дополненная до матрицы требуемого размера нулевыми строками и столбцами). Порядок регуляризации s обычно выбирается невысокий: $s = 0, 1, 2$.

Важно отметить, что поскольку речь всегда идет о восстановлении изображения конечного размера,

то неизбежно возникает так называемый краевой эффект, связанный с тем, что в реальном, подлежащем восстановлению изображении, нет краев с плавно убывающей яркостью, которые всегда получаются при моделировании смазанного или расфокусированного изображения (при размытии изображения конечных размеров). Поэтому, во-первых, при моделировании такого изображения, чтобы оно соответствовало реальности, плавно убывающие края надо обрезать. Во-вторых, перед восстановлением изображения его края должны быть каким-то способом восстановлены или сглажены. В противном случае восстановленное изображение может содержать сильно выраженные артефакты в виде так называемого эффекта Гиббса.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На рис. 3 показаны оригинальное изображение, используемое для моделирования расфокусированного изображения, полученное расфокусированное изображение и результат его восстановления с помощью ядра, учитывающего конечность размеров пикселей. На рис. 4 показано изображение с большим размером пикселя и результат его расфокусировки, а на рис. 5 представлены результаты деконволюции с помощью двух разных ФРТ – первая из них не учитывает конечность размера пикселя (рис. 5а), а вторая – учитывает (рис. 5б). Параметр гауссовской расфокусировки при этом выбран таким, при котором имеются заметные различия графиков этих двух ФРТ. Из сравнения представленных рис. 5 результатов видно, что ФРТ, учитывающая конечность размера пикселя, дает заметно более четкое изображение.

На рис. 6 представлен аналогичный результат, демонстрирующий восстановление линейно смазанного в заданном направлении изображения (6 пикселей по горизонтали и 2 пикселя по вертикали) с помощью ядра, учитывающего конечность размера пикселя. На рис. 7 представлена серия восстанавливаемых изображений при различных погрешностях параметров восстанавливающего ядра, определяющих предполагаемый вектор смаза. Величины погрешностей составляют 25%, 12.5%, 6%, 0% от истинных составляющих смаза. Из этого видно, что, во-первых, возможны ситуации, когда величины погрешностей, выражаемые даже долями пикселей, могут значительно ухудшать результат восстановления изображения. Во-вторых, последовательное монотонное уменьшение величин погрешностей дает монотонное улучшение качества изображения. Это показывает возможность оптимизации параметров используемого ядра при решении задачи адаптивной деконволюции.



(a)



(б)



(в)

Рис. 3. Эталонное изображение, его гауссовская расфокусировка при $\sigma = 2$ и результат конволюции, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, порядок регуляризации $s = 1$

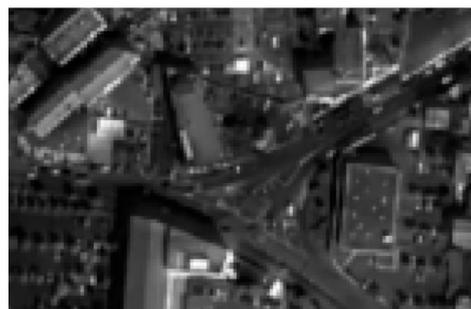


(a)



(б)

Рис. 4. Эталонное изображение (с вдвое большей зернистостью по сравнению с рис. 3) и его гауссовская расфокусировка при $\sigma = 0.4$



(a)

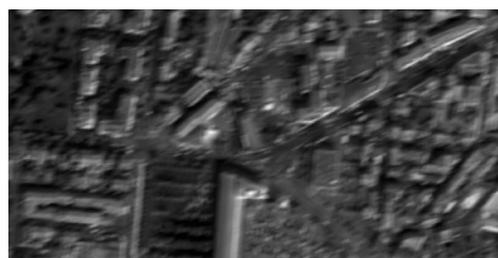


(б)

Рис. 5. Результаты конволюции расфокусированного изображения, показанного на рис. 4, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-5}$, порядок регуляризации $s = 1$



(a)

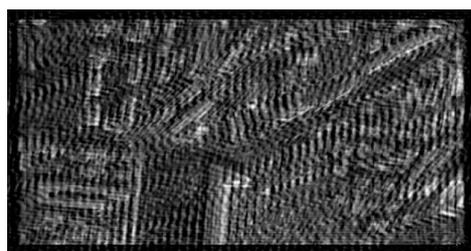


(б)



(в)

Рис. 6. Эталонное изображение, его линейный смаз и результат его восстановления, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-3}$, порядок регуляризации $s = 1$



(a)



(б)



(в)



(г)

Рис. 7. Серия результатов восстановления линейно смазанного изображения, показанного на рис. 6, при последовательно уменьшающейся погрешности параметров смаза, параметр регуляризации $\alpha = 10^{-3}$, порядок регуляризации $s = 1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численное моделирование показало хорошую работоспособность предложенного метода, преимуществ которого следующие. Во-первых, учет конечности размеров пикселя, точнее говоря, учет параметров смаза с точностью до долей пикселя, может улучшать разрешение деталей изображения в случае достижения предела, обусловленного размерами пикселя. Причем, что важно, такой учет осуществляется без интерполяции изображения. Во-вторых, полученная формула ядра свертки для случая линейного смаза, позволяет восстанавливать изображение, смазанное под произвольным углом, а не только смазанное по горизонтали, без необходимости предварительного поворота изображения с целью сведения задачи к восстановлению горизонтально смазанного изображения. При этом величины смаза могут быть достаточно большими, например, составлять несколько десятков пикселей. В-третьих, поскольку формула позволяет использовать параметры смаза необязательно выраженные целым числом пикселей, то это дает удобную возможность использовать ее для решения задачи адаптивной деконволюции, когда может потребоваться ее непрерывная зависимость по обоим параметрам смаза.

Вклад авторов

В.Б. Федоров – идея и теоретическая часть исследования.

С.Г. Харламов – разработка алгоритмов и проведение компьютерных расчетов.

А.В. Федоров – обработка результатов и помощь в проведении компьютерных расчетов.

Authors' contributions

V.B. Fedorov – idea and theoretical part of the study.

S.G. Kharlamov – development of algorithms and conducting computer calculations.

A.V. Fedorov – processing results and assistance in computer calculations.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федоров В.Б., Харламов С.Г., Стариковский А.И. Восстановление смазанного фотографического изображения движущегося объекта, получаемого на пределе разрешающей способности. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4): 94–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>
2. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*. М.: Изд-во МГУ; 1989. 199 с.
3. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода типа свертки. В: *Некоторые вопросы автоматизированной обработки и интерпретации физических экспериментов*. Вып. 1. М.: Изд-во МГУ; 1973. С. 170–191.
4. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*. М.: Наука; 1983. 198 с.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: URSS; 2022. 288 с. ISBN 978-5-9710-9341-1
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений. В кн.: *Некорректные задачи естествознания*; под ред. А.Н. Тихонова, А.В. Гончарского. М.: Изд-во МГУ; 1987. С. 185–195.

7. Василенко Г.И. *Теория восстановления сигналов: о редукции к идеальному прибору в физике и технике*. М.: Сов. радио; 1979. 272 с.
8. Василенко Г.И., Тараторин А.М. *Восстановление изображений*. М.: Радио и связь; 1986. 302 с.
9. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. *Восстановление и реконструкция изображений*: пер. с англ. М.: Мир; 1989. 336 с.
10. Медофф Б.П. Реконструкция изображений по ограниченным данным: Теория и применение в компьютерной томографии. В кн.: *Реконструкция изображений*; под ред. Г. Старка. М.: Мир; 1992. С. 384–436.
11. Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений*: пер. с англ. М.: Техносфера; 2012. 1104 с.
12. Russ J.C. *The Image Processing Handbook*. Boca Raton: CRC Press; 2007. 852 p.
13. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. *Цифровая обработка изображений в информационных системах*. Новосибирск: Изд-во НГТУ; 2002. 352 с.
14. Сизиков В.С., Довгань А.Н., Лавров А.В. *Устойчивые методы математико-компьютерной обработки изображений и спектров*. СПб.: Ун-т ИТМО; 2022. 70 с.
15. Сизиков В.С., Рущенко Н.Г. Новые устойчивые методы восстановления искаженных изображений. *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2023;66(7):559–567. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2023-66-7-559-567>
16. Домненко В.М., Бурсов М.В., Иванова Т.В. *Моделирование формирования оптического изображения*. СПб.: НИУ ИТМО; 2011. 141 с.

REFERENCES

1. Fedorov V.B., Kharlamov S.G., Starikovskiy A.I. Restoration of a blurred photographic image of a moving object obtained at the resolution limit. *Russian Technological Journal*. 2023;11(4):94–104. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2023-11-4-94-104>
2. Bakushinskii A.B., Goncharskii A.V. *Nekorrektnye zadachi. Chislennye metody i prilozheniya (Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications)*. Moscow: MSU; 1989. 199 p. (in Russ.).
3. Goncharskii A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. Methods for solving Fredholm integral equations of the 1st kind of convolution type. In: *Some Problems of Automated Processing and Interpretation of Physical Experiments*. V. 1. Moscow: MSU; 1973. P. 170–191 (in Russ.).
4. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Regulyariziruyushchie algoritmy i apriornaya informatsiya (Regularizing Algorithms and A Priori Information)*. Moscow: Nauka; 1983. 198 p. (in Russ.).
5. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach (Methods for Solving Ill-Posed Problems)*. Moscow: URSS; 2022. 288 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-9341-1
6. Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V. Inverse problems of photo image processing. In: Tikhonov A.N., Goncharskii A.V. (Eds.). *Incorrect Problems of Natural Sciences*. Moscow: MSU; 1987. P. 185–195 (in Russ.).
7. Vasilenko G.I. *Teoriya vosstanovleniya signalov: o reduktsii k ideal'nomu priboru v fizike i tekhnike (Theory of Signal Recovery: On the Reduction to an Ideal Device in Physics and Technology)*. Moscow: Sovetskoe Radio; 1979. 272 p. (in Russ.).
8. Vasilenko G.I., Taratorin A.M. *Vosstanovlenie izobrazhenii (Image Restoration)*. Moscow: Radio i svyaz'; 1986. 302 p. (in Russ.).
9. Bates R., McDonnell M. *Vosstanovlenie i rekonstruktsiya izobrazhenii (Image Restoration and Reconstruction)*: transl. from Engl. Moscow: Mir; 1989. 336 p. (in Russ.).
[Bates R., McDonnell M. *Image Restoration and Reconstruction*. New York: Oxford University Press; 1986. 312 p.]
10. Medoff B.P. Image Reconstruction from Limited Data: Theory and Application in Computed Tomography. In: Stark G. (Ed.). *Image Reconstruction*. Moscow: Mir; 1992. P. 384–436 (in Russ.).
11. Gonzales R., Woods R. *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii (Digital Image Processing)*: transl. from Engl. Moscow: Tekhnosfera; 2012. 1104 p. (in Russ.).
[Gonzales R., Woods R. *Digital Image Processing*. Pearson/Prentice Hall; 2008. 954 p.]
12. Russ J.C. *The Image Processing Handbook*. Boca Raton: CRC Press; 2007. 852 p.
13. Gruzman I.S., Kirichuk V.S., Kosykh V.P., Peretyagin G.I., Spektor A.A. *Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii v informatsionnykh sistemakh (Digital Image Processing in Information Systems)*. Novosibirsk: NSTU Publ.; 2002. 352 p. (in Russ.).
14. Sizikov V.S., Dovgan' A.N., Lavrov A.V. *Ustoichivye metody matematiko-komp'yuterno obrabotki izobrazhenii i spektrov (Stable Methods of Mathematical and Computer Processing of Images and Spectra)*. St. Petersburg: ITMO University; 2022. 70 p. (in Russ.).
15. Sizikov V.S., Ruschenko N.G. New sustainable methods for distorted image recovering. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Priborostroenie = J. Instrument Eng.* 2023;66(7):559–567 (in Russ.). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2023-66-7-559-567>
16. Domnenko V.M., Bursov M.V., Ivanova T.V. *Modelirovanie formirovaniya opticheskogo izobrazheniya (Modeling of Optical Image Formation)*. St. Petersburg: ITMO Research Institute; 2011. 141 p. (in Russ.).

Об авторах

Федоров Виктор Борисович, к.т.н., доцент, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: feodorov@mirea.ru. Scopus Author ID 57208924592, SPIN-код РИНЦ 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

Харламов Сергей Григорьевич, аспирант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

Федоров Алексей Викторович, магистрант, кафедра высшей математики, Институт искусственного интеллекта, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: alexis.sasis7@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0003-2314-7400>

About the authors

Victor B. Fedorov, Cand. Sci. (Eng.), Associate Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: feodorov@mirea.ru. Scopus Author ID 57208924592, RSCI SPIN-code 2622-7666, <https://orcid.org/0000-0003-1011-5453>

Sergey G. Kharlamov, Postgraduate Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: serhar2000@mail.ru. <https://orcid.org/0000-0003-4470-6323>

Alexey V. Fedorov, Master Student, Higher Mathematics Department, Institute of Artificial Intelligence, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: alexis.sasis7@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0003-2314-7400>

Отпечатано в «МИРЭА – Российский технологический университет».

119454, РФ, г. Москва, пр-т Вернадского, д. 78.

Подписано в печать 28.03.2025 г.

Формат 60 × 90/8. Печать цифровая.

Уч.-изд. листов 19.25.

Тираж 100 экз. Заказ № 2483.

Подписку на печатную версию
Russian Technological Journal можно оформить
через ООО «Агентство «Книга-Сервис», www.akc.ru.

Подписной индекс: **79641**.

Printed in MIREA – Russian Technological University,
78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russian
Federation.

Signed to print March 28, 2025.

Format 60 × 90/8. Digital print.

C.p.l. 19.25.

100 copies. Order No. 2483.

Subscription to the *Russian Technological
Journal* printed version can be made through
the *Kniga-Servis* Agency, www.akc.ru.

Subscription index: **79641**.