

Математическое моделирование
Mathematical modeling

УДК 51-74:621.791.92

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-132-142>

EDN EATLRM



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Математическое моделирование технологических параметров порошковой лазерной наплавки на основе аппроксимации профиля дорожки напыления

М.Е. Соловьев ^{1, @},
Д.В. Малышев ¹,
С.Л. Балдаев ²,
Л.Х. Балдаев ²

¹ Ярославский государственный технический университет, Ярославль, 150023 Россия

² ООО «Технологические системы защитных покрытий», Москва, Щербинка, 108851 Россия

@ Автор для переписки, e-mail: me_s@mail.ru

Резюме

Цели. Лазерная порошковая наплавка – перспективная технология в машиностроении, позволяющая эффективно восстанавливать изношенные поверхности деталей и создавать специальные покрытия с ценными свойствами. Методы математического моделирования имеют решающее значение в исследовании и развитии технологии лазерной наплавки. Процесс нанесения порошкового покрытия предполагает перемещение распылительной головки относительно поверхности детали, образуя валик – дорожку напыления. Покрытия формируются путем последовательного нанесения этих дорожек. Целью исследования является изучение различных методов аппроксимации профиля и оптимизация технологических параметров в процессах порошковой лазерной наплавки.

Методы. Использованы методы математического моделирования для описания зависимостей параметров профиля дорожек напыления при лазерной наплавке от технологических параметров процесса. Получение контуров профилей сечения наплавки осуществлялось методами анализа изображений микрофотографий шлифов поперечных сечений деталей с наплавкой. Для аппроксимации кривых контуров сечений использовались методы линейного и нелинейного регрессионного анализа. Зависимость параметров контуров профилей сечения наплавки от технологических параметров напыления аппроксимировалась двухфакторным уравнением параболической регрессии. Поиск оптимальных значений технологических параметров напыления осуществляли методом условной оптимизации с линейной аппроксимацией доверительной области.

Результаты. Рассмотрены три варианта аппроксимирующих функций профиля сечения дорожки наплавки, из которых была выбрана нелинейная двухпараметрическая функция. Получены отображения множества технологических параметров наплавки во множество параметров аппроксимирующей линии контура. С использованием регрессионных моделей данных отображений найдены оптимальные значения технологических параметров наплавки, обеспечивающие максимальную величину площади контура наплавки при ограничениях на долю области подплавления к общей площади сечения. Аппроксимирующая функция профиля сечения дорожки наплавки использована для расчета оптимального шага нанесения дорожек, обеспечивающего наиболее ровную поверхность наплавки.

Выводы. Результаты проведенного исследования могут рассматриваться в качестве методики оптимизации технологических параметров лазерной наплавки порошковых металлов, позволяющей обеспечивать заданные характеристики профиля дорожки напыления и выбирать шаг нанесения дорожек, при котором достигается наиболее ровная поверхность наплавки.

Ключевые слова: математическое моделирование, лазерная наплавка, контур сечения, аппроксимация, регрессионный анализ, оптимизация

• Поступила: 16.05.2024 • Доработана: 18.08.2024 • Принята к опубликованию: 29.01.2025

Для цитирования: Соловьев М.Е., Малышев Д.В., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х. Математическое моделирование технологических параметров порошковой лазерной наплавки на основе аппроксимации профиля дорожки напыления. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):132–142. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-132-142>, <https://elibrary.ru/EATLRM>

Прозрачность финансовой деятельности: Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Mathematical modeling of technological parameters of laser powder surfacing based on approximation of the deposition track profile

Mikhail E. Soloviev ^{1, @},
Denis V. Malyshev ¹,
Sergey L. Baldaev ²,
Lev Kh. Baldaev ²

¹ Yaroslavl State Technical University, Yaroslavl, 150023 Russia

² Technological Systems of Protective Coatings, Moscow, Shcherbinka, 108851 Russia

@ Corresponding author, e-mail: me_s@mail.ru

Abstract

Objectives. Laser powder surfacing is a promising mechanical engineering technology used to effectively restore worn surfaces of parts and create special coatings with valuable properties. In the research and development of laser cladding technology, mathematical modeling methods are of crucial importance. The process of applying powder coating involves moving the spray head relative to the surface of the part to form a roller or spray path, whose sequential application results in the formation of coatings. The study sets out to evaluate methods of profile approximation and optimization of technological parameters in laser powder cladding processes.

Methods. In order to describe the dependencies of the profile parameters of the deposition paths during laser surfacing on the technological parameters of the process, mathematical modeling methods were used. The contours of the profiles of the surfacing section were obtained by analyzing images of microphotographs of thin sections of the cross sections of parts with applied surfacing. To approximate the curves of the section contours, methods of linear and nonlinear regression analysis were used. The dependence of the parameters of the profile contours of the surfacing section on the technological parameters of the spraying was represented by a two-factor parabolic regression equation. The search for optimal values of spraying technological parameters was carried out using the method of conditional optimization with linear approximation of the confidence region.

Results. A nonlinear two-parameter function was selected from three options for approximating functions of the section profile of a surfacing track. Technological surfacing parameters were mapped onto a set of parameters of the approximating contour line. Optimal values of the technological parameters of surfacing were obtained using regression models of these mappings to provide the maximum value of the area of the surfacing contour under restrictions on the proportion of the sub-melting area to the total cross-sectional area. The approximating function of the cross-sectional profile of the surfacing track was used to calculate the optimal pitch of the tracks that provides the most even surface.

Conclusions. The results of the study represent a technique for optimizing the technological parameters of laser surfacing with powder metals to ensure specified characteristics of the deposition track profile and select the track deposition step at which the most even deposition surface is achieved.

Keywords: mathematical modeling, laser cladding, section contour, approximation, regression analysis, optimization

• Submitted: 16.05.2024 • Revised: 18.08.2024 • Accepted: 29.01.2025

For citation: Soloviev M.E., Malyshev D.V., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh. Mathematical modeling of technological parameters of laser powder surfacing based on approximation of the deposition track profile. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):132–142. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-132-142>, <https://elibrary.ru/EATLRM>

Financial disclosure: The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Лазерная порошковая наплавка [1–3] является перспективной технологией в машиностроении, позволяющей эффективно восстанавливать поверхности изношенных деталей, а также создавать специальные покрытия деталей, обладающие ценным комплексом свойств, таких как повышенная теплостойкость, износостойкость, химическая стойкость и других. Данная технология относится к методам газотермического напыления порошковых покрытий [4–6], суть которых состоит в разогреве порошкообразных материалов до температур, превышающих их температуры плавления, и нанесения на поверхность детали высокоскоростным газовым потоком. В отличие от других методов, в случае лазерной наплавки источником нагрева частиц является инфракрасный лазер, луч которого фокусируется непосредственно на поверхности детали или вблизи нее. Это позволяет более точно регулировать температуру наплавляемого материала и более точно позиционировать дорожку наплавки. За счет этих преимуществ лазерная наплавка является основой аддитивных технологий металлов [7].

Методы математического моделирования являются важнейшим инструментом исследования при разработке технологии лазерной наплавки [1, 8, 9]. Традиционно при этом решаются задачи о распределении теплового потока по сечению наплавляемого материала и прилегающей к нему области детали. При этом используются как аналитические, так и численные методы, среди которых в последние годы весьма распространенными являются методы конечных элементов [10–12], в т.ч. с использованием универсальных пакетов инженерного анализа. Вместе с тем, в практическом отношении весьма важной характеристикой

процесса наплавки является форма профиля сечения дорожки наплавки [13]. Процесс лазерной наплавки, как и процессы, используемые при других методах порошкового напыления покрытий, состоит в движении головки распылителя относительно поверхности обрабатываемой детали. В результате на поверхности детали формируется валик – дорожка напыления (наплавки). Путем последовательного нанесения дорожек формируется покрытие. Форма профиля сечения дорожки напыления определяет толщину покрытия и качество его поверхности [14]. Ввиду сложности физико-химических процессов, протекающих при формировании дорожки напыления, моделирование профиля сечения дорожки на основе физических принципов представляется затруднительным, поэтому на практике профили сечения дорожек аппроксимируют путем обработки микрофотографий экспериментально полученных шлифов поперечных сечений дорожек напыления [15]. В качестве аппроксимирующих функций профилей сечения в работах [16–18] использованы достаточно простые математические функции, такие как парабола, дуга окружности или эллипса, хотя на практике форма профиля может быть более сложной [15, 19]. В связи с этим целью настоящей работы было исследование методами математического моделирования различных способов аппроксимации профилей сечения дорожек напыления с последующей оптимизацией технологических параметров порошковой лазерной наплавки.

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ И ОПТИМИЗАЦИИ

Контурные профили сечения дорожек напыления получали путем обработки микрофотографий поперечных шлифов дорожек напыления методами

анализа изображений с использованием библиотеки Python OpenCV. С этой целью с изображения вручную удаляли вспомогательные надписи (при их наличии) и преобразовывали цветное пространство в оттенки серого. Далее на изображении выделяли массив контуров с использованием алгоритма [20], в котором контур с максимальным числом элементов отвечал контуру дорожки. Для выполнения процедур преобразования файлов изображений и выделения контуров дорожек был создан программный модуль Python, позволяющий в пакетном режиме производить обработку массива сканированных изображений, возвращающий набор файлов в формате csv, содержащих массив координат выделенного контура.

Аппроксимацию контура профиля сечения и построение математических моделей зависимостей параметров аппроксимирующих функций от технологических параметров напыления дорожки осуществляли методами линейного и нелинейного регрессионного анализа [21, 22]. Математическая формулировка данных задач выглядела следующим образом.

Пусть для фиксированных $x_j \in X \subset \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, имеются значения случайной функции $y_j(x_j, \omega_j) \in Y$, где ω_j – случайное событие из Ω при заданной сигмалгебре A и вероятностной мере P . Целью аппроксимации является восстановление в X функции $E y(x, \omega) = \eta(x)$, называемой функцией регрессии. В настоящей работе рассмотрены три варианта функций регрессии типа $\eta_i(x, \theta_i)$, $i = 1, 2, 3$. Здесь η_i – известные функции – регрессионные модели, конкретный вид которых будет описан в основной части статьи, θ_i – параметры из заданных параметрических множеств Θ_i , определяемые по значениям y_j .

Среди трех исследованных в настоящей работе регрессионных моделей две относятся к классу линейных по параметрам и одна – к нелинейным по параметрам. Отклики линейной по параметрам модели y_j можно представить в виде:

$$y_j = \eta_{\text{lin}}(x_j, \theta) + \varepsilon_j = \theta^T f(x_j) + \varepsilon_j, \quad (1)$$

где ε_j – случайные величины, распределение которых предполагали нормальным с нулевым математическим ожиданием $E \varepsilon_j = 0$ и диагональной ковариационной матрицей $E \varepsilon_j \varepsilon_k = \sigma^2 \delta_{jk}$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$ – вектор неизвестных параметров из $\mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))^T$ – вектор заданных, линейно независимых на множестве X функций.

В матричных обозначениях $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T$, $F = (f_1(x_j), \dots, f_m(x_j))_{j=1}^n$ система (1) записывается в виде:

$$Y = F\theta + \varepsilon, \quad (2)$$

где $EY = F\theta$ и ковариационная матрица DY равна $\sigma^2 I_n$, I_n – единичная матрица.

В настоящей работе оценки $\hat{\theta}$ неизвестных параметров θ вычисляли методом наименьших квадратов (МНК):

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-2} (y_j - \eta(x_j, \theta))^2 \quad (3)$$

или в матричных обозначениях:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} (Y - F\theta)^T (Y - F\theta). \quad (4)$$

Решение задачи (4) сводится к известной формуле регрессионного анализа

$$\hat{\theta} = (F^T F)^{-1} F^T Y. \quad (5)$$

Дисперсия адекватности модели s^2 , являющаяся несмещенной оценкой дисперсии σ^2 , при этом вычисляется по формуле $s^2 = SS_{\text{reg}} / (n - m)$, где

$$SS_{\text{reg}} = (Y - F\hat{\theta})^T (Y - F\hat{\theta}). \quad (6)$$

Поскольку в настоящей работе отсутствовала возможность оценить дисперсию ошибки по параллельным опытам, проверка адекватности модели сравнением дисперсий адекватности и дисперсии ошибки не представлялась возможной. Поэтому адекватность моделей оценивали качественно по близости к единице значения коэффициента детерминации

$$R^2 = 1 - SS_{\text{reg}} / SS_{\text{tot}}, \quad (7)$$

где $SS_{\text{tot}} = (Y - \bar{Y})^T (Y - \bar{Y})$, $\bar{Y}$ – среднее значение откликов.

Для вычислений по формулам (5)–(7) был создан программный модуль Python с использованием пакета линейной алгебры numpy.linalg, позволяющий в пакетном режиме обрабатывать csv файлы с координатами контуров дорожек, полученные в результате обработки изображений с микрофотографий шлифов поперечных сечений, и строить графики точек исходных контуров и линий регрессии, полученных в результате расчета оценок параметров уравнений регрессии.

Для модели регрессии, нелинейной по параметрам, вместо представления откликов в виде (2) использовали представление:

$$Y = H(X, \theta) + \varepsilon, \quad (8)$$

где $H(X, \theta) = (\eta(x_1, \theta), \dots, \eta(x_n, \theta))^T$ – вектор значений нелинейной функции $\eta(x, \theta)$ в точках x_j с параметрами θ .

Формулировка (4) МНК в данном случае принимает вид:

$$\hat{\theta} = \arg \min_{\theta \in \Theta} (Y - H(X, \theta))^T (Y - H(X, \theta)). \quad (9)$$

Система нормальных уравнений МНК при этом становится нелинейной, и использовать простую формулу (5) для вычисления оценок параметров не удастся, поэтому для решения данной задачи применяли численный метод оптимизации [23]. Формула (6) для нелинейной модели имеет вид:

$$SS_{\text{reg}} = (\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\theta}}))^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\mathbf{X}, \hat{\boldsymbol{\theta}})), \quad (10)$$

при этом общий вид формулы (7) для вычисления коэффициента детерминации сохраняется.

По результатам анализа адекватности из полученных трех регрессионных моделей была выбрана одна, которая в дальнейшем использовалась для построения зависимостей формы профиля сечения дорожки наплавки от технологических параметров процесса напыления. Для этого вычисленные оценки параметров выбранной модели использовали при построении отображений множества технологических параметров напыления $u_k \in U \subset \mathbb{R}^p, k = 1, \dots, p$, во множество параметров линии профиля $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m)^T$. Поскольку оценки параметров $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ являются случайными величинами, а технологические параметры u_k – заданными, то для построения таких отображений использовался метод линейного регрессионного анализа. Конкретный вид функций регрессии описан в основной части статьи. Эти функции в дальнейшем использовались для оптимизации технологического режима напыления с использованием алгоритмов, описанных в [24].

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Профиль сечения наплавленной дорожки можно разделить на две области [13]: часть, расположенная выше поверхности детали – область наплавки, и часть, расположенная ниже поверхности детали – область подплавления, образующаяся в результате углубления ванны расплавленного металла в объем обрабатываемой детали. В [15] проведено сравнение способов аппроксимации профилей сечения области наплавки простыми аппроксимирующими функциями: дугой окружности, дугой эллипса, синусоидой и параболой. По результатам сравнения остаточных дисперсий сравниваемых аппроксимирующих функций был сделан вывод, о том, что аппроксимация параболой оказывается наилучшим вариантом из числа изученных. Следует отметить, однако, что профили сечений валиков, изученные в данной работе, были достаточно регулярными в отличие от профилей, представленных в других работах, в т.ч. в статье [13]. Кроме того, вышеперечисленные аппроксимирующие функции не описывают область подплавления, профиль которой оказывается более

сложным. В связи с этим в настоящей работе в первую очередь были изучены в качестве аппроксимирующих функций полиномы более высокого порядка по сравнению с параболой.

На рис. 1 показаны точки контура профиля, полученные обработкой изображения в работе [13], и их аппроксимации двумя типами полиномов. Первый тип регрессионной модели представлял полином седьмой степени следующего вида:

$$y = (1 - x^2) \sum_{i=0}^5 \theta_i^1 x^i, \quad (11)$$

где θ_i^1 – параметры регрессии, $x \in [-1; 1] \subset \mathbb{R}$ – нормированные значения аргумента. Здесь и далее верхний индекс у параметра θ обозначает номер аппроксимирующей функции, верхний индекс у аргумента x – степень.

Второй тип полиномиальной аппроксимирующей функции для профиля сечения валика, предложенный в работе [25] и названный биквадратичным аппроксиматором, имеет вид:

$$y = (1 - x^2)(\theta_0^2 + \theta_1^2 x^2 + \theta_2^2 x^4). \quad (12)$$

В отличие от модели (11) здесь сохраняются только четные степени аргумента, чем достигается симметрия профиля относительно оси OY , что теоретически должно выполняться при коаксиальной наплавке и фактически учитывалось также в работе [15] при выборе простых симметричных аппроксимирующих функций. В обеих моделях вынесен общий член $(1 - x^2)$, что обеспечивает нули функций в точках $x = \pm 1$. Это объясняется тем, что на практике удобно представлять аргумент функций регрессии в безразмерной нормированной форме:

$$x^{\text{усл}} = \frac{x^{\text{нат}} - x_0}{\Delta x}, \quad (13)$$

где $x^{\text{нат}}$ – значение аргумента в натуральных единицах, $x^{\text{усл}}$ – значение в безразмерном масштабе, $x_0 = (\max(x^{\text{нат}}) + \min(x^{\text{нат}}))/2$ – средний уровень, $\Delta x = (\max(x^{\text{нат}}) - \min(x^{\text{нат}}))/2$ – шаг варьирования.

Обе модели (11) и (12) являются линейными по параметрам, и их оценки легко вычисляются по формуле (5). Как видно из рис. 1, и та и другая функция хорошо аппроксимируют как область наплавки, так и область подплавления. При этом коэффициент детерминации функции 1 составил значения $R^2 = [0.995; 0.996]$ для аппроксимирующих функций областей наплавки и подплавления, соответственно, а для функции 2 – несколько ниже: $R^2 = [0.985; 0.976]$. На этом основании можно было бы принять, например, функцию (11) в качестве

основного инструмента при аппроксимации профилей сечения дорожек, однако при обработке микрофотографий менее регулярных профилей выяснилось, что полиномиальная аппроксимация обладает недостатком, состоящим в том, что при обработке сложных или нерегулярных профилей на аппроксимирующей кривой появляются дополнительные экстремумы, которых не должно быть в физическом смысле. В связи с этим в настоящей работе предложена нелинейная аппроксимирующая функция следующего вида:

$$y = A \cos^B \left(\frac{\pi}{2} x \right), \quad (14)$$

где параметры аппроксимации обозначены как A , B . Их вычисление осуществлялось методом нелинейного оценивания.

Удобство функции (14) состоит в том, что она, имея всего два параметра, при этом, аналогично функциям (11), (12), обладает симметрией, имеет нули в точках $x = \pm 1$ и вместе с тем всегда имеет только один экстремум в интервале $x \in [-1; 1]$.

На рис. 2 приведены точки профиля сечения дорожки наплавки по обработке микрофотографии [13] для параметров наплавки: мощность лазера равна 310 Вт, подача порошка равна 29 г/м и аппроксимирующие кривые по трем рассмотренным выше функциям регрессии. Как видно, для этого профиля полиномиальные функции хорошо аппроксимируют верхнюю часть профиля, но не работоспособны для нижней части (области подплавления), тогда как функция (14) адекватно описывает весь профиль, включая как область наплавки, так и область подплавления.

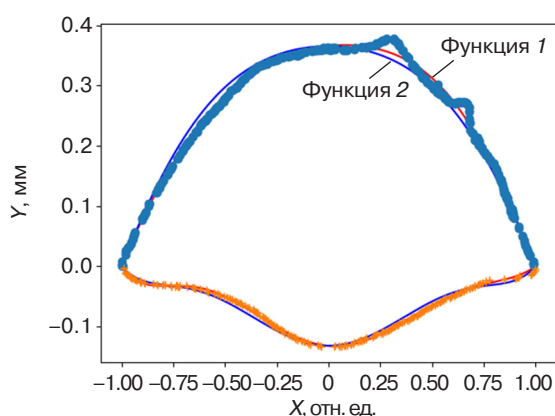


Рис. 1. Точки профиля сечения дорожки наплавки по обработке микрофотографии [13] (положительные значения Y – область наплавки, отрицательные значения Y – область подплавления) и аппроксимирующие кривые: по модели (11) – функция 1, по модели (12) – функция 2

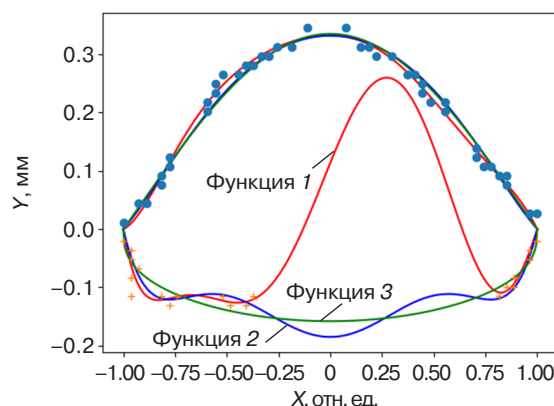


Рис. 2. Точки профиля сечения дорожки наплавки по обработке микрофотографии [13] и аппроксимирующие кривые: по модели (11) – функция 1, по модели (12) – функция 2, по модели (14) – функция 3

В табл. 1, 2 приведены параметры A , B аппроксимирующих функций модели (14) и значения Δx для различных технологических параметров напыления сплава никель-хром NiCr16 на стальную заготовку, полученные по результатам обработки изображений профилей, приведенных в работе [13]. Эти данные могут быть использованы для валидации математических моделей наплавки, основанных на численном решении уравнений гидродинамики и теплопереноса с использованием методов конечных элементов [11, 12, 18]. Также, учитывая достаточно широкий диапазон варьирования параметров наплавки, можно использовать результаты аппроксимации для построения отображений множества технологических параметров наплавки во множество параметров линии профиля и решения задачи оптимизации технологических параметров. Для построения таких отображений в настоящей работе использован метод регрессионного анализа с аппроксимацией зависимостей параметров профиля от технологических параметров двухфакторными уравнениями параболической регрессии вида:

$$\theta_i = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1^2 + b_4 x_2^2 + b_5 x_1 x_2, \quad (15)$$

где θ_i – параметры профиля, x_1 , x_2 – мощность лазера и подача порошка в нормированных единицах (13), b_j , $j = 0, \dots, 5$ – коэффициенты регрессии, вычисляемые с помощью МНК.

В качестве параметров профиля использовали значения параметров Δx , A_0 , A_1 , B_0 , B_1 , приведенные в табл. 1, 2, а также вычисленные на их основе площади под кривой профиля S_0 , S_1 . Индексы 0 и 1 у параметров отвечают верхней и нижней частям профиля, соответственно. Вычисление площадей осуществляли численным интегрированием функций профиля (14) для соответствующих технологических параметров.

Таблица 1. Параметры аппроксимации профилей дорожек наплавки при различных технологических параметрах напыления (верхняя часть контура)

Мощность лазера, Вт	Подача порошка, г/м	Δx , мм	A_0 , мм	B_0
310	12	0.333	0.145	0.661
310	29	0.429	0.335	1.022
310	45	0.500	0.606	0.689
570	12	0.476	0.228	1.035
570	29	0.524	0.495	0.558
570	45	0.587	0.521	0.664
570	85	0.802	1.084	0.541
720	12	0.508	0.233	0.973
720	29	0.516	0.481	0.597
720	45	0.603	0.598	0.678
720	63	0.746	0.815	0.769
1150	12	0.619	0.248	0.893
1150	29	0.643	0.572	0.904
1150	45	0.778	0.721	0.654
1150	63	0.873	0.959	0.463
1150	85	1.095	0.988	0.506
1150	100	1.159	0.919	0.513

В табл. 3 приведены рассчитанные значения оценок коэффициентов регрессии (15) для исследованных параметров и коэффициенты детерминации моделей. На практике наибольший интерес представляют параметры Δx , A_0 , A_1 , из которых первые два характеризуют полуширину и высоту валика наплавки, соответственно, а третий – глубину области подплавления в объем детали. Регрессионные модели для этих показателей, как видно из табл. 3, характеризуются близкими к единице значениями R^2 , что свидетельствует об их адекватности.

Также важными являются площади под кривой профиля. С их использованием вычисляется

Таблица 2. Параметры аппроксимации профилей области подплавления при различных технологических параметрах напыления (нижняя часть контура)

Мощность лазера, Вт	Подача порошка, г/м	Δx , мм	A_1 , мм	B_1
310	12	0.333	-0.054	0.550
310	29	0.429	-0.158	0.367
310	45	0.500	-0.106	0.264
570	12	0.476	-0.245	2.518
570	29	0.524	-0.139	1.191
570	45	0.587	-0.323	0.365
570	85	0.802	-0.357	0.320
720	12	0.508	-0.213	1.088
720	29	0.516	-0.208	0.769
720	45	0.603	-0.317	0.431
720	63	0.746	-0.388	0.473
1150	12	0.619	-0.603	2.246
1150	29	0.643	-0.445	2.384
1150	45	0.778	-0.523	1.553
1150	63	0.873	-0.675	1.715
1150	85	1.095	-0.676	0.792
1150	100	1.159	-0.577	0.414

относительная доля области подплавления (коэффициент подплавления):

$$D = \frac{S_1}{S_0 + S_1}. \quad (16)$$

Для качественной наплавки величина параметра D должна быть оптимальной: при малых значениях D не обеспечивается прочная связь наплавки с подложкой, а при слишком больших происходит ухудшение свойств материала основы детали.

На основании вычисленных значений коэффициентов уравнений регрессии были рассчитаны

Таблица 3. Коэффициенты уравнений регрессии зависимостей параметров профиля от технологических параметров наплавки

Параметр	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	R^2
Δx	0.6932	0.1514	0.2539	-0.0083	0.0543	0.0356	0.9877
a_0	0.7772	0.0339	0.4114	-0.0055	-0.1445	-0.0717	0.9543
a_1	-0.3444	-0.1908	-0.1000	-0.0445	-0.0048	0.0406	0.9052
B_0	0.6222	-0.0459	-0.1436	0.0225	0.1185	-0.0918	0.5243
B_1	0.6396	0.6522	-0.7602	0.0881	0.2115	-0.2000	0.7039
S_0	0.9716	0.2314	0.8311	0.0162	0.0200	0.0824	0.9704
S_1	0.4409	0.3013	0.3442	0.0466	0.0876	0.1216	0.9594

параметры математических моделей: координаты критических точек и собственные значения матриц Гессе. Также были построены графики поверхностей регрессии. Анализ полученных регрессионных моделей показывает, что в изученной области изменения технологических параметров зависимости параметров профиля Δx , A_0 , A_1 , S_0 , S_1 от технологических параметров x_1 , x_2 монотонны, тогда как зависимость $D(x_1, x_2)$ имеет характер гиперболического параболоида. В качестве примера на рис. 3–5 приведены графики поверхностей $A_0(x_1, x_2)$, $S_0(x_1, x_2)$, $D(x_1, x_2)$.

Выбор значений параметров профиля наплавки зависит от конкретных требований к изделию. Если задача оптимизации не стоит и нужно лишь обеспечить некоторые заданные характеристики профиля, то можно воспользоваться построением контурных кривых функций регрессии. В качестве примера на рис. 6 приведены контурные кривые для функций $S_0(x_1, x_2)$ и $D(x_1, x_2)$. Выбрав требуемые значения каждой из функций, необходимые для их достижения значения технологических параметров x_1 и x_2 , можно найти как координаты точек пересечения соответствующих изолиний. Так, в частности, требованию $S_0 = 0.6$, $D = 0.25$ отвечают значения координат $x_1 = -0.753$, $x_2 = -0.283$. Координаты вычисляются из решения нелинейной системы уравнений:

$$\begin{cases} S_0(x_1, x_2) - 0.6 = 0, \\ D(x_1, x_2) - 0.25 = 0. \end{cases}$$

Другой вариант состоит в формулировке задачи по нахождению условного экстремума одного из показателей при ограничениях на значения других. Например, координаты условного максимума функции $S_0(x_1, x_2)$ при ограничении $D(x_1, x_2) = 0.35$, вычисленные методом условной оптимизации с линейной аппроксимацией доверительной области [23], составили значения $x_{\text{opt}} = (0.350, 0.748)$.

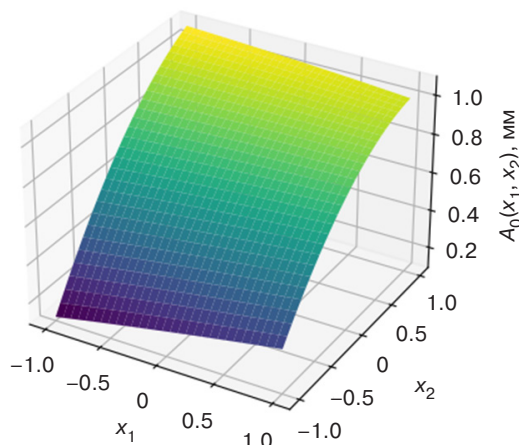


Рис. 3. Зависимость высоты валика наплавки от нормированных значений мощности лазера и подачи порошка

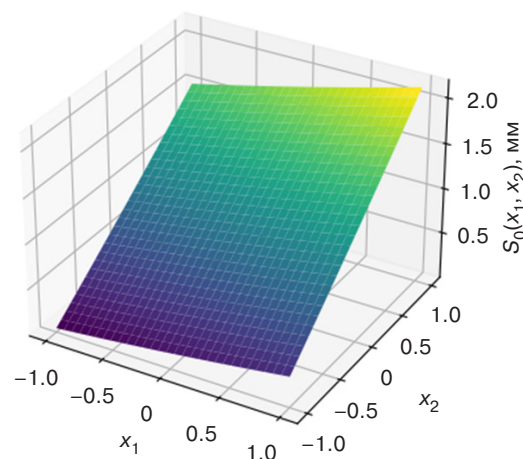


Рис. 4. Зависимость площади сечения валика наплавки от нормированных значений мощности лазера и подачи порошка

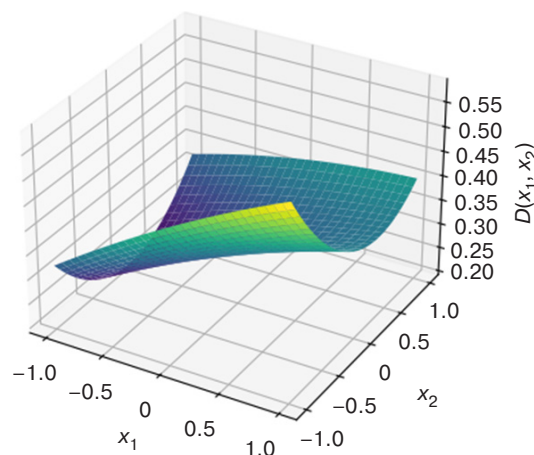


Рис. 5. Зависимость относительной доли площади области подплавления от нормированных значений мощности лазера и подачи порошка

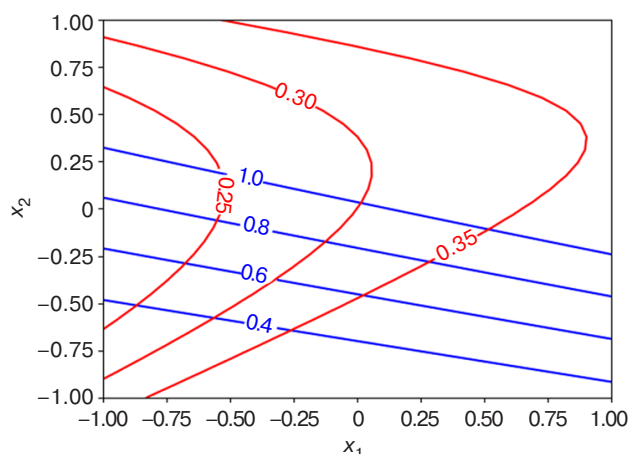


Рис. 6. Контурные кривые функций регрессии $S_0(x_1, x_2)$ для уровней {0.4, 0.6, 0.8, 1.0} и $D(x_1, x_2)$ – для уровней {0.25, 0.30, 0.35}

После того как выбраны оптимальные значения технологических параметров наплавки, можно рассчитать оптимальный шаг нанесения дорожек. Технологический процесс нанесения покрытия состоит в последовательном наложении порошкообразного материала на поверхность в виде дорожек с определенным шагом, который в дальнейшем будем обозначать w . Если шаг нанесения меньше, чем ширина профиля дорожки, то происходит наложение профилей, и материал второй дорожки заполняет пространство между этими профилями [15]. При этом возникает задача выбора оптимального значения w , при котором избыток материала, образующийся при наложении профилей, полностью заполняет свободное пространство между ними. В работе [26] рассчитаны оптимальные значения w для дорожек некоторых простых профилей. Вычислим оптимальное значение w при аппроксимации профиля функцией (14), параметры которой A_0 , B_0 рассчитаны по уравнению регрессии (15).

На рис. 7 показана схема к вычислению оптимальной величины w : кривая 1 отвечает профилю первой дорожки, кривая 2 – профилю второй дорожки, наложение которой осуществляется с нахлестом относительно первой. Образующийся вследствие наложения профилей избыток материала теоретически формирует кривую 3, которая получена суммированием профилей дорожек 1 и 2 в области их наложения. Оптимальным шагом наложения дорожек будет такой, при котором площадь области ABC пересечения профилей дорожек будет равна площади области BDE, расположенной выше зоны нахлеста. В этом случае расплавленный металл из области под кривой 3 равномерно заполнит свободное пространство между дорожками, и поверхность покрытия будет наиболее ровной.

С учетом симметрии фигур относительно вертикальной линии FG, проходящей через точку пересечения профилей B с безразмерной координатой ζ , оптимальное наложение дорожек предполагает равенство площадей областей ABG и BDF, которое можно выразить следующим образом:

$$A_0 \zeta - \int_0^{\zeta} A_0 \cos^{B_0} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx = \int_{\zeta}^1 A_0 \cos^{B_0} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx. \quad (17)$$

Отсюда следует, что

$$\zeta = \int_0^1 \cos^{B_0} \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx. \quad (18)$$

Легко видеть, что оптимальное значение шага нанесения дорожек в безразмерных единицах может быть выражено через ζ посредством формулы:

$$w_{\text{opt}} = 2 - 2(1 - \zeta) = 2\zeta. \quad (19)$$

В частности, для $B_0(0.35, 0.75) = 0.544$ оптимальное значение шага равно $w_{\text{opt}} = 1.498$, а для $B_0(-0.753, -0.283) = 0.700$ равно $w_{\text{opt}} = 1.409$.

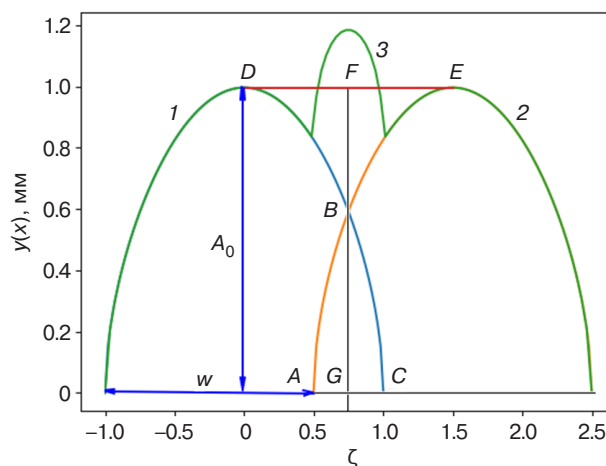


Рис. 7. Схема к вычислению оптимального значения шага наложения дорожек

ВЫВОДЫ

В работе предложена методика аппроксимации профиля сечения дорожки напыления при лазерной наплавке порошковых металлов и оптимизации на ее основе технологических параметров наплавки.

Исследованы три варианта аппроксимирующих функций профиля, из которых выбран вариант нелинейной зависимости, включающий два параметра аппроксимации. Рассчитаны коэффициенты уравнений регрессии зависимости параметров аппроксимирующей функции, а также площади сечения контура и коэффициента подплавления от технологических параметров наплавки: мощности лазера и подачи порошка.

В результате математического моделирования зависимости параметров функции профиля сечения дорожки напыления показано, что площадь сечения контура монотонно возрастает с увеличением мощности лазера и подачи порошка, тогда как зависимость коэффициента подплавления от указанных параметров имеет вид поверхности с седловой точкой. Для данных характеристик контура решена задача условной оптимизации площади сечения контура при ограничении на величину коэффициента подплавления.

Предложенная в настоящей работе аппроксимирующая функция профиля сечения дорожки наплавки может быть использована для решения возникающей на практике задачи расчета оптимального шага нанесения дорожек, обеспечивающего достижение ровной поверхности наплавки.

Вклад авторов. Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

Authors' contribution. All authors equally contributed to the research work.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. Toyserkani E., Khajepour A., Corbin S. *Laser Cladding*. Boca Raton: CRC Press; 2005. 263 p.
2. Ghasempour-Mouziraji M., Lagarinhos J., Afonso D., de Sousa R.A. A review study on metal powder materials and processing parameters in Laser Metal Deposition. *Opt. Laser Technol.* 2024;170:110226. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2023.110226>
3. Cheng J., Xing Y., Dong E., Zhao L., Liu H., Chang T., Chen M., Wang J., Lu J., Wan J. An Overview of Laser Metal Deposition for Cladding: Defect Formation Mechanisms, Defect Suppression Methods and Performance Improvements of Laser-Cladded Layers. *Materials*. 2022;15(16):5522. <https://doi.org/10.3390/ma15165522>
4. Davis J.R. *Handbook of Thermal Spray Technology*. ASM International; 2004. 338 p.
5. Газотермическое напыление; под общей ред. Балдаева Л.Х. М.: Маркет ДС; 2007. 344 с.
[Baldaev L.H. (Ed.). *Gazotermicheskoe napylenie (Gas Thermal Spraying)*; Moscow: Market DS; 2007. 344 p. (in Russ.).]
6. Ильющенко А.Ф., Шевцов А.И., Оковитый В.А., Громыко В.Ф. Процессы формирования газотермических покрытий и их моделирование. Минск: Беларус. наука; 2011. 357 с.
[Il'yushchenko A.F., Shevtsov A.I., Okovityi V.A., Gromyko V.F. *Protsessy formirovaniya gazotermicheskikh pokrytiy i ikh modelirovanie (Processes of Formation of Gas-Thermal Coatings and Their Modeling)*. Minsk: Belarus. nauka; 2011. 357 p. (in Russ.).]
7. Bian L., Shamsaei N., Usher J. (Eds.). *Laser-Based Additive Manufacturing of Metal Parts: Modeling, Optimization, and Control of Mechanical Properties*. Boca Raton: CRC Press; 2018. 328 p.
8. Steen W.M., Mazumder J. *Laser Material Processing*. London: Springer; 2010. 558 p.
9. Dowden J.M. *The Mathematics of Thermal Modeling an Introduction to the Theory of Laser Material Processing*. Boca Raton: CRC Press; 2001. 292 p.
10. Pinkerton A.J. Advances in the modeling of laser direct metal deposition. *J. Laser Appl.* 2015;27:S15001. <https://doi.org/10.2351/1.4815992>
11. Kovalev O.B., Bedenko D.V., Zaitsev A.V. Development and application of laser cladding modeling technique: From coaxial powder feeding up to the surface deposition and bead formation. *Appl. Math. Modell.* 2018;57:339–359. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.043>
12. Khamidullin B.A., Tsvil'skiy I.V., Gorunov A.I., Gilmudinov A.Kh. Modeling of the effect of powder parameters on laser cladding using coaxial nozzle. *Surf. Coat. Technol.* 2019;364:430–443. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2018.12.002>
13. De Oliveira U., Ocelik V., De Hosson J.Th.M. Analysis of coaxial laser cladding processing conditions. *Surf. Coat. Technol.* 2005;197(2–3):127–136. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2004.06.029>
14. Ocelik V., De Oliveira U., De Hosson J.Th.M. Thick tool steel coatings with laser cladding. *WIT Trans. Eng. Sci.* 2007;55. <https://doi.org/10.2495/SECM070021>
15. Ocelik V., Nenadl O., Palavra A., De Hosson J.Th.M. On the geometry of coating layers formed by overlap. *Surf. Coat. Technol.* 2014;242:54–61. <https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2014.01.018>
16. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Development of micro-plasma transferred arc (μ -PTA) wire deposition process for additive layer manufacturing applications. *J. Mater. Process. Technol.* 2014;214(5):1102–1110. <https://doi.org/10.1016/j.jmatprotec.2013.12.016>
17. Jhavar S., Jain N.K., Paul C.P. Enhancement of Deposition Quality in Micro-plasma Transferred Arc Deposition Process. *Mater. Manuf. Process.* 2014;29(8):1017–1023. <https://doi.org/10.1080/10426914.2014.892984>
18. Jain N.K., Sawant M.S., Nikam S.H., Jhavar S. Metal Deposition: Plasma-Based Processes. In: *Encyclopedia of Plasma Technology*. 1st ed. V. II. New York: Taylor and Francis; 2016. 19 p. <http://doi.org/10.1081/E-EPLT-120053919>
19. Yu T., Yang L., Zhao Yu., Sun J., Li B. Experimental research and multi-response multi-parameter optimization of laser cladding Fe313. *Opt. Laser Technol.* 2018;108:321–332. <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.06.030>
20. Suzuki S., Keiichi A. Topological structural analysis of digitized binary images by border following. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*. 1985;30(1):32–46. [https://doi.org/10.1016/0734-189X\(85\)90016-7](https://doi.org/10.1016/0734-189X(85)90016-7)
21. Draper N.R., Smith H. *Applied Regression Analysis*: 3rd ed. New York: Wiley-Interscience; 1998. 736 p.
22. Bates D.M., Watts D.G. *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*. New York: Wiley & Sons; 1988. 365 p.
23. Vugrin K.W., Swiler L.P., Roberts R.M., Stucky-Mack N.J., Sullivan S.P. Confidence region estimation techniques for nonlinear regression in groundwater flow: Three case studies. *Water Resour. Res.* 2007;43(3):W03423. <https://doi.org/10.1029/2005WR004804>
24. Powell M.J.D. Direct search algorithms for optimization calculations. *Acta Numerica*. 1998;7:287–336. <https://doi.org/10.1017/S0962492900002841>
25. Соловьев М.Е., Кокарев С.С., Балдаев С.Л., Балдаев Л.Х., Мищенко В.И., Федорова М.О. Аппроксимация профиля сечения пятна напыления при газотермическом нанесении порошкового покрытия. *Информационно-технологический вестник*. 2022;3(33):138–163.
[Soloviev M.E., Kokarev S.S., Baldaev S.L., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I., Fedorova M.O. Approximation of the profile of the section of the spray spot during gas thermal deposition of powder coating. *Informatsionno-tekhnologicheskii vestnik = Information Technology Bulletin*. 2022;3(33):138–163 (in Russ.).]
26. Niz'ev V.G., Khomenko M.D., Mirzade F.Kh. Process planning and optimisation of laser cladding considering hydrodynamics and heat dissipation geometry of parts. *Quantum Electron.* 2018;48(8):743–748. <https://doi.org/10.1070/QEL16708>
27. Cao Y., Zhu S., Liang X., Wang W. Overlapping model of beads and curve fitting of bead section for rapid manufacturing by robotic MAG welding process. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing (RCIM)*. 2011;27(3):641–645. <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2010.11.002>

28. Балдаев С.Л., Соловьев М.Е., Раухваргер А.Б., Балдаев Л.Х., Мищенко В.И. Влияние параметров плазменного напыления порошка оксида алюминия на адгезионную прочность керамических покрытий термонапряженных узлов газотурбинных двигателей. *Вестник МЭИ*. 2024;1:93–102. <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2024-1-93-102>
[Baldaev S.L., Soloviev M.E., Raukhvarger A.B., Baldaev L.Kh., Mishchenko V.I. The Influence of Aluminum Oxide Powder Plasma Spraying Parameters on the Adhesive Strength of Ceramic Coatings Applied to the Gas Turbine Engine Thermally Stressed Components. *Vestnik MEI = Bulletin of MPEI*. 2024;1:93–102 (in Russ.). <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2024-1-93-102>]

Об авторах

Соловьев Михаил Евгеньевич, д.ф.-м.н. профессор, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, SPIN-код РИНЦ 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Малышев Денис Владимирович, ассистент, кафедра информационных систем и технологий, Институт цифровых систем, ФГБОУ «Ярославский государственный технический университет» (150023, Россия, Ярославль, Московский пр-т, д. 88). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

Балдаев Сергей Львович, к.т.н., заместитель генерального директора по технологиям, ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Россия, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, SPIN-код РИНЦ 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Балдаев Лев Христофорович, д.т.н., генеральный директор ООО «Технологические системы защитных покрытий» (108851, Москва, г. Щербинка, ул. Южная, д. 9А). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. SPIN-код РИНЦ 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>

About the authors

Mikhail E. Soloviev, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: me_s@mail.ru. Scopus Author ID 57190224257, ResearcherID A-4328-2014, RSCI SPIN-code 7444-3564, <https://orcid.org/0000-0002-8840-248X>

Denis V. Malyshev, Assistant, Department of Information Systems and Technologies, Institute of Digital Systems, Yaroslavl State Technical University (88, Moskovskii pr., Yaroslavl, 150023 Russia). E-mail: deniscs49@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0009-9861-1531>

Sergey L. Baldaev, Cand. Sci. (Eng.), Deputy General Director, Technologies of Technological Systems of Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: s.baldaev@tspc.ru. ResearcherID B-8056-2018, RSCI SPIN-code 6954-6407, <https://orcid.org/0000-0002-1917-7979>

Lev Kh. Baldaev, Dr. Sci. (Eng.), General Director, Technologies of Technological Systems of Protective Coatings (9A, Yuzhnaya ul., Shcherbinka, Moscow, 108851 Russia). E-mail: l.baldaev@tspc.ru. RSCI SPIN-code 8991-5015, <https://orcid.org/0000-0002-9084-8771>