

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 539.3, 621.762

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-74-92>

EDN KРQMIJ



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

# Математическое моделирование процесса горячего изостатического прессования труб из порошковых материалов

В.А. Головешкин<sup>1, 2, @</sup>, А.А. Николаенко<sup>1</sup>, В.Н. Самаров<sup>3</sup>,  
Ж. Рейссон<sup>4</sup>, Д.М. Фисунова<sup>1</sup>

<sup>1</sup> МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия

<sup>2</sup> Институт прикладной механики, Российская академия наук, Москва, 125040 Россия

<sup>3</sup> ООО «Лаборатория новых технологий», Москва, 121352 Россия

<sup>4</sup> Клермон Ферран, Франция

@ Автор для переписки, e-mail: [vag-1953@yandex.ru](mailto:vag-1953@yandex.ru)

## Резюме

**Цели.** Цель работы – создание модели, которая позволяет с помощью математического моделирования исследовать процесс горячего изостатического прессования (ГИП) длинных труб из порошковых материалов. Напряженно-деформируемое состояние исследуется вдали от верхней и нижней границ капсулы в цилиндрической системе координат, поэтому осевая скорость деформации в каждый момент процесса предполагается постоянной по объему.

**Методы.** Используются методы математического моделирования. Порошковый материал моделируется как пластически сжимаемая сплошная среда. Для описания его механических свойств в процессе деформации используется модель Грина. Для анализа механического поведения материала капсулы применяется модель идеальной пластичности при условии несжимаемости. Температурное поле предполагается постоянным по объему и по времени в течение всего процесса.

**Результаты.** Поскольку, как правило, толщина стенок труб существенно меньше их радиуса, то в процессе исследования принималась гипотеза о постоянстве относительной плотности порошкового материала по объему в каждый момент процесса. Принятая гипотеза позволила свести задачу определения скоростей деформаций на каждом шаге процесса к решению некоторой системы двух уравнений с двумя неизвестными. По известным скоростям деформации определяются скорости перемещений, что позволяет получить конечные размеры трубы (при относительной плотности порошкового материала равной единице). Анализируются усадки всех размеров трубы (вертикального, внутреннего радиуса, наружного радиуса), как функции относительной плотности.

**Выводы.** Предложенная модель описания процесса ГИП длинных труб из порошковых материалов позволяет учитывать все особенности данного процесса в зависимости от параметров системы. Показана возможность использования трубчатых образцов для определения функций, входящих в условие Грина.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, пластически сжимаемая среда, горячее изостатическое прессование, порошковый материал, условие Грина, идеальная пластичность

• Поступила: 25.06.2024 • Доработана: 29.08.2024 • Принята к опубликованию: 06.02.2025

**Для цитирования:** Головешкин В.А., Николаенко А.А., Самаров В.Н., Рейссон Ж., Фисунова Д.М. Математическое моделирование процесса горячего изостатического прессования труб из порошковых материалов. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):74–92. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-74-92>, <https://elibrary.ru/KPQMIJ>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Mathematical modeling of hot isotatic pressing of tubes from powder materials

Vasiliy A. Goloveshkin<sup>1, 2, @</sup>, Artem A. Nickolaenko<sup>1</sup>, Victor N. Samarov<sup>3</sup>,  
Gerard Raison<sup>4</sup>, Daria M. Fisunova<sup>1</sup>

<sup>1</sup> MIREA – Russian Technological University, Moscow, 119454 Russia

<sup>2</sup> Institute of Applied Mechanics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 125040 Russia

<sup>3</sup> Laboratory of new technologies, Moscow, 121352 Russia

<sup>4</sup> Clermond Ferrand, France

@ Corresponding author, e-mail: vag-1953@yandex.ru

### Abstract

**Objectives.** The work set out to create a mathematical model to investigate the process of hot isostatic pressing (HIP) process of long tubes from powder materials in metal capsules. By analyzing the stress-strain state in the areas far from the top and bottom borders in the cylindrical system of coordinates, the axial strain rate at every moment of the process can be considered to be constant through the entire volume.

**Methods.** Mathematical modeling methods were used to describe mechanical properties in the process of HIP deformation by Green's model of porous compressible media. The HIP capsule material, which is considered to be non-compressible, is described by the ideal plasticity model. The temperature field is assumed to be uniform over the volume and constant during the time of deformation.

**Results.** The hypothesis of the uniform density over the cross section at each moment of the process was considered during analysis to the extent that the wall thickness of the tube is substantially less than its diameter. This hypothesis allowed us to reduce the task of determining the strain rates at every step of the process to a solution comprising two equations having two variables. When the strain rates are determined, the deformation field is built to obtain the final dimensions of the tube when the powder material is fully consolidated at the end of the HIP process.

**Conclusions.** The proposed model for describing the process hot isostatic pressing of long tubes from powder materials takes all the features of this process into account depending on the system parameters. The possibility of using tubular samples to determine the functions included in the Green's condition is demonstrated.

**Keywords:** mathematical modeling, plastically compressible media, Hot Isostatic Pressing, powder material, plastically irreversible compressible media, Green's plasticity criterion, ideal plasticity

• Submitted: 25.06.2024 • Revised: 29.08.2024 • Accepted: 06.02.2025

**For citation:** Goloveshkin V.A., Nickolaenko A.A., Samarov V.N., Raison G., Fisunova D.M. Mathematical modeling of hot isotatic pressing of tubes from powder materials. *Russian Technological Journal*. 2025;13(2):74–92. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2025-13-2-74-92>, <https://elibrary.ru/KPQMIJ>

**Financial disclosure:** The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Процесс горячего изостатического прессования (ГИП) – это процесс высокотемпературного уплотнения (~1000 °С) порошковых материалов под действием внешнего давления (~1000 атм.). Процесс ГИП применяется для изготовления изделий методом порошковой металлургии. Эти изделия обладают высокими эксплуатационными характеристиками. Однако именно в силу высоких прочностных свойств их последующая обработка затруднена. Это требует максимальной точности на стадии изготовления. В процессе ГИП порошковый материал помещается в металлический контейнер (капсула). Капсула деформируется вместе с порошковым материалом до полного уплотнения последнего, потом удаляется химическим или механическим путем. Задача капсулы состоит в том, чтобы после окончания процесса порошковый монолит принял нужную форму. Цель математического моделирования процесса – спроектировать такую капсулу, чтобы после окончания процесса порошковый монолит принял нужную геометрическую форму.

Можно выделить две основные проблемы математического моделирования процесса ГИП. Первая: для процесса ГИП характерны большие деформации (начальная плотность порошка примерно 65% от плотности монолита) Математически это означает, что определяющие соотношения будут нелинейными, а граничные условия ставятся на переменной во времени границе. Вторая проблема более принципиальна – это трудность построения определяющих соотношений (под определяющими соотношениями понимаются соотношения, определяющие связь тензора напряжений в среде с параметрами, характеризующими состояние среды). Эта проблема характерна для всех задач механики деформируемого твердого тела, исследующих его поведение за пределом упругости. Так как любые определяющие соотношения будут приближенными, тогда, даже если исключить математические проблемы, любой расчет будет носить приближенный характер. Поэтому реальный процесс изготовления порошковых изделий должен быть итерационным процессом, схема которого изложена в [1]. Суть состоит в следующем: строится математическая модель, на основании этой

модели проектируется капсула, изготавливается изделие. Его параметры сравниваются с требуемыми, на основании этого сопоставления проводится уточнение математической модели. Этот метод является некоторым аналогом метода СН-ЭВМ<sup>1</sup>, предложенного А.А. Ильюшиным в [2, 3]. Приемлемой математической моделью процесса ГИП считается модель, удовлетворяющая следующим требованиям:

- 1) она дает близкое первое приближение;
- 2) правильно учитывает влияние параметров;
- 3) позволяет вносить изменения в параметры модели на основании результатов эксперимента и в случае необходимости вводить дополнительные параметры.

Обычно для запуска изделия в производство требуются 2–3 экспериментальные итерации. На современном этапе задач математического моделирования является стабильное получение нужной геометрии на второй экспериментальной итерации. Для этого, как показывает опыт, необходимо на первой итерации иметь погрешность порядка 10%.

Существуют различные подходы к описанию поведения порошковой среды, некоторые из них, например [4], рассматривают среду как дискретную. При таких подходах, рассматривая взаимодействие отдельных частиц, необходимо учитывать эффекты, возникающие на поверхности их взаимодействия [5, 6]. Использование подобного подхода требует привлечения статистических методов [7]. Чаше порошковый материал рассматривается как единый континуум, и поскольку в процессе ГИП нас интересуют кинематические аспекты поведения, то, как показано в [8–10], кинематические аспекты поведения порошковых материалов не отличаются существенно от поведения сплошных сред.

Определяющие соотношения для порошковых материалов обладают одним существенным отличием от используемых в классических теориях пластичности [11–14], поскольку эти работы исходят, как правило, из малых объемных деформаций или равенства их нулю. Для порошковых материалов объемная деформация (или эквивалентные параметры: относительная плотность, пористость) является

<sup>1</sup> Сложное нагружение – электронно-вычислительная машина. [The complex loading computer method.]

важным параметром, характеризующим состояние среды. Необходимо отметить, что реальный интерес при описании процесса ГИП представляет как раз сдвиговая часть тензора деформаций. Поскольку целью ГИП является получение монолитного изделия, а начальную плотность можно определить с высокой степенью точности, то объемную составляющую тензора деформации можно считать известной. Время процесса уплотнения достаточно точно (при известной температуре и давлении) может быть определено по диаграммам уплотнения (диаграмма Эшби) [15–18]. Различные модели, описывающие поведение пластически сжимаемых сред, представлены в работах Друянова Б.А. [19], Грина Р.Дж [20], Штерна М.Б. [21], Скорохода В.В. [22].

Наличие капсулы приводит к тому, что ее стенки «экранируют» внешнее давление по-разному

в различных направлениях. Особенно это проявляется при изготовлении труб из порошковых материалов. В данном процессе существуют фактически три внешние границы: внешняя и внутренняя радиальные границы, и граница на торцах. Как показано в [23], при определенных условиях это может приводить к петлеобразному движению внутренней стенки. Особенности поведения труб из порошковых материалов на начальном этапе процесса исследованы в [24]. Цель данной работы – разработать модель, позволяющую качественно оценивать изменение основных параметров, определяющих геометрию трубы, на всем этапе процесса ГИП, а также выяснить принципиальную возможность использования экспериментов по прессованию труб для определения параметров, характеризующих механическое поведение порошкового материала.

## 1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в цилиндрической системе координат  $(r, z)$  имеется следующая система: при  $R_1 < r < R_2, 0 < z < H$  имеется капсула с идеально пластическим материалом с пределом текучести  $T_1$ ; при  $R_3 < r < R_4, 0 < z < H$  имеется капсула с идеально пластическим материалом с пределом текучести  $T_2$ ; при  $R_2 < r < R_3, 0 < z < H$  имеется порошковый материал, поведение которого описывается моделью Грина, с пределом текучести монолита  $Y$ . Здесь  $R_1, R_2, R_3, R_4, H$  – текущие геометрические размеры трубы.

Для описания механических свойств порошкового материала используется эллиптическое условие текучести Грина [20, 22]:

$$\frac{\sigma^2}{f_2^2} + \frac{s^2}{f_1^2} = Y^2, \quad (1.1)$$

где  $\sigma = \sigma_{ij}/3$  – первый инвариант тензора напряжений ( $\sigma_{ij}$  – составляющие тензора напряжений);  $s$  – интенсивность девиатора тензора напряжений,  $s^2 = (3/2)s_{ij}s_{ij}$ ,  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}$ ; индексы  $i, j$  принимают целые значения 1, 2, 3, при этом оси  $r$  соответствует индекс 1, оси  $\varphi$  – 2, оси  $z$  – 3;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ,  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$ );  $f_1, f_2$  – известные из эксперимента функции относительной плотности  $\rho$ .

Согласно закону течения

$$\varepsilon_{ij} = \omega \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_{ij}$  – составляющие тензора скоростей деформации;  $\Phi(\sigma_{ij}) = 0$  – уравнение поверхности текучести (1.1);  $\omega$  – коэффициент пропорциональности, определяемый в каждой точке пространства в процессе решения.

Процесс исследуется вдали от торцов трубы. Это позволяет предположить, что скорость деформации  $\varepsilon_z$  постоянна по всему объему системы. Тогда, в силу сделанного предположения и осевой симметрии,  $\varepsilon_{rz} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{z\varphi} = 0$ , также  $\sigma_{rz} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{z\varphi} = 0$ . Используя (1.1), (1.2), с учетом последних замечаний получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \omega/9 \left[ (2/f_2^2 + 18/f_1^2)\sigma_r + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_\varphi + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_z \right], \\ \varepsilon_\varphi &= \omega/9 \left[ (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_r + (2/f_2^2 + 18/f_1^2)\sigma_\varphi + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_z \right], \\ \varepsilon_z &= \omega/9 \left[ (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_r + (2/f_2^2 - 9/f_1^2)\sigma_\varphi + (2/f_2^2 + 18/f_1^2)\sigma_z \right]. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Рассматривая (1.3) как систему уравнений относительно напряжений, получаем:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 1/(18\omega) \left[ (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon_r + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_\phi + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_z \right], \\ \sigma_\phi &= 1/(18\omega) \left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_r + (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon_\phi + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_z \right], \\ \sigma_z &= 1/(18\omega) \left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_r + (9f_2^2 - 2f_1^2)\varepsilon_\phi + (9f_2^2 + 4f_1^2)\varepsilon_z \right].\end{aligned}\quad (1.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.1), получаем:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{6Y}{\sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_z^2)}}. \quad (1.5)$$

Мощность внутренних сил в единице объема  $w$  определяется соотношением

$$w = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.6)$$

Согласно (1.4)–(1.6)

$$w = \frac{Y}{3} \sqrt{(9f_2^2 - 2f_1^2)(\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_z^2)}. \quad (1.7)$$

Материал капсулы предполагаем несжимаемым. Его поведение описывается законом идеальной пластичности.

$$s^2 = T^2, \quad (1.8)$$

где  $T$  – предел текучести.

Согласно закону течения (1.2) и уравнению поверхности текучести (1.8),

$$\varepsilon_r = \omega [2\sigma_r - \sigma_\phi - \sigma_z], \quad \varepsilon_\phi = \omega [2\sigma_\phi - \sigma_r - \sigma_z], \quad \varepsilon_z = \omega [2\sigma_z - \sigma_\phi - \sigma_r]. \quad (1.9)$$

Полагаем

$$\sigma_r + \sigma_\phi + \sigma_z = -3p. \quad (1.10)$$

Так как в силу условия несжимаемости

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\phi + \varepsilon_z = 0, \quad (1.11)$$

то из (1.9)–(1.11) имеем:

$$\sigma_r = -p + \varepsilon_r / 3\omega, \quad \sigma_\phi = -p + \varepsilon_\phi / 3\omega, \quad \sigma_z = -p + \varepsilon_z / 3\omega. \quad (1.12)$$

Согласно (1.8), (1.12),

$$\frac{1}{\omega} = \frac{T\sqrt{6}}{\sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_z^2)}}. \quad (1.13)$$

Мощность внутренних сил в единице объема:

$$w = T \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_r^2 + \varepsilon_\phi^2 + \varepsilon_z^2)}. \quad (1.14)$$

С учетом осевой симметрии радиальное уравнение равновесия в квазистатическом приближении имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\phi)}{r} = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение равновесия по оси  $z$  удовлетворяется интегрально, т.е. суммарные усилия напряжений  $\sigma_z$  в каждом сечении  $z = \text{const}$  уравниваются внешним давлением на торец капсулы:

$$2\pi \int_{R_1}^{R_4} \sigma_z r dr = -\pi P (R_4^2 - R_1^2), \quad (1.16)$$

где  $P$  – внешнее давление.

На границах  $r = R_2$ ,  $r = R_3$  принимается условие равенства радиальных скоростей  $U_r$ . На границах  $r = R_1$ ,  $r = R_4$  полагаем

$$\sigma_r = -P. \quad (1.17)$$

В силу предположения о постоянстве скорости деформации  $\varepsilon_z$  по объему, поскольку постановка задачи допускает перемещение системы как жесткого тела вдоль оси  $z$ , можно положить следующее выражение для осевой скорости  $U_z$ :

$$U_z = (V / H) z, \quad (1.18)$$

где  $V$  – значение скорости  $U_z$  при  $z = H$ , определяемое в процессе решения.

Радиальная скорость в каждый момент является функцией только радиуса  $U_r = U_r(r)$ . Для скоростей деформаций имеем следующие соотношения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = V / H. \quad (1.19)$$

Соотношения (1.1)–(1.13), (1.15), (1.19) при дополнительных условиях (1.16)–(1.18) математически определяют задачу нахождения поля скоростей в каждый момент времени при известном распределении относительной плотности порошкового материала.

Закон изменения плотности порошкового материала определяется уравнением неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\rho U_r r)}{\partial r} = 0, \quad (1.20)$$

где  $t$  – время.

## 2. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Как показано в [24], при прессовании трубы возникает неоднородное распределение плотности по радиусу. Однако, как правило, толщина стенок трубы существенно меньше ее радиуса. В этих условиях можно приближенно положить, что относительная плотность порошкового материала постоянна по радиусу в каждый момент процесса. Следовательно, для радиальной скорости перемещений  $U_r$  в порошковом материале имеем приближенное представление:

$$U_r = Ar + B/r, \quad (2.1)$$

где  $A$ ,  $B$  – коэффициенты, определяемые в процессе решения.

Значение скорости  $U_z$  определяется соотношением (1.18).

Из условия несжимаемости (1.11) в материале капсулы имеем:  $\frac{dU_r}{dr} + \frac{U_r}{r} + \varepsilon_z = 0$ . Следовательно:

$$U_r = -1/2 \varepsilon_z r + C/r, \quad (2.2)$$

где  $C$  – коэффициент, определяемый в процессе решения.

Полагаем, что

$$U_r = U_1 \text{ при } r = R_2; \quad U_r = U_2 \text{ при } r = R_3. \quad (2.3)$$

Окончательно, с учетом (2.3) и условия непрерывности скоростей при  $r = R_2$ ,  $r = R_3$ , скорости во всей области равны:

при  $R_1 < r < R_2$ ,  $0 < z < H$  (капсула)

$$\begin{aligned} U_z &= V / H, \\ U_r &= -(1/2)\varepsilon_z r + C_1 / r, \\ C_1 &= (1/2)\varepsilon_z R_2^2 + U_1 R_2; \end{aligned} \quad (2.4)$$

при  $R_3 < r < R_4$ ,  $0 < z < H$  (капсула)

$$\begin{aligned} U_z &= V / H, \\ U_r &= -(1/2)\varepsilon_z r + C_3 / r, \\ C_3 &= (1/2)\varepsilon_z R_3^2 + U_2 R_3; \end{aligned} \quad (2.5)$$

при  $R_2 < r < R_3$ ,  $0 < z < H$  (порошок)

$$\begin{aligned} U_z &= (V / H)z, \\ U_r &= Ar + B_1 R_3^2 / r, \\ A &= (U_2 R_3 - U_1 R_2) / (R_3^2 - R_2^2), B_1 = (U_1 R_2 - U_2 R_3^2 / R_3) / (R_3^2 - R_2^2). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Согласно (2.4)–(2.6), (1.19) скорости деформаций во всей области:

при  $R_1 < r < R_2$ ,  $0 < z < H$  (капсула)

$$\varepsilon_z = V / H, \quad \varepsilon_r = -(1/2)\varepsilon_z - C_1 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = -(1/2)\varepsilon_z + C_1 / r^2; \quad (2.7)$$

при  $R_3 < r < R_4$ ,  $0 < z < H$  (капсула)

$$\varepsilon_z = V / H, \quad \varepsilon_r = -(1/2)\varepsilon_z - C_3 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = -(1/2)\varepsilon_z + C_3 / r^2; \quad (2.8)$$

при  $R_2 < r < R_3$ ,  $0 < z < H$  (порошок)

$$\varepsilon_z = V / H, \quad \varepsilon_r = A - B_1 R_3^2 / r^2, \quad \varepsilon_\varphi = A + B_1 R_3^2 / r^2. \quad (2.9)$$

Суммарная мощность внутренних сил  $W$  состоит из трех составляющих:  $W = W_1 + W_2 + W_3$ , где  $W_1$  – мощность внутренних сил во внутренней капсуле при  $R_1 < r < R_2$ ,  $0 < z < H$ ;  $W_3$  – мощность внутренних сил во внешней капсуле при  $R_3 < r < R_4$ ,  $0 < z < H$ ;  $W_2$  – мощность внутренних сил в порошке при  $R_2 < r < R_3$ ,  $0 < z < H$ .

При  $R_1 < r < R_2$ ,  $0 < z < H$  мощность внутренних сил в единице объема, согласно (1.14), (2.7), равна  $w_1 = T_1 \sqrt{2/3} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_1^2 / r^4}$ , где  $T_1$  – предел текучести. Тогда полная мощность во внутренней капсуле:

$$W_1 = 2\pi H T_1 \sqrt{2/3} \int_{R_1}^{R_2} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_1^2 / r^4} r dr.$$

После соответствующих вычислений:

$$W_1 = \pi H T_1 \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \left[ \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_2^4 + 4C_1^2} - \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_1^4 + 4C_1^2} \right] + 2C_1 \ln \left( \frac{R_2^2}{R_1^2} \cdot \frac{2C_1 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_1^4 + 4C_1^2}}{2C_1 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_2^4 + 4C_1^2}} \right) \right\}. \quad (2.10)$$

При  $R_3 < r < R_4$ ,  $0 < z < H$  мощность внутренних сил в единице объема, согласно (1.14), (2.8), равна  $w_3 = T_2 \sqrt{2/3} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_3^2 / r^4}$ , где  $T_2$  – предел текучести. Полная мощность:

$$W_3 = 2\pi HT_2 \sqrt{2/3} \int_{R_3}^{R_4} \sqrt{(3/2)\varepsilon_z^2 + 2C_3^2 / r^4} r dr.$$

Вычисляя, получаем:

$$W_3 = \pi HT_2 \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \left[ \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_4^4 + 4C_3^2} - \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_3^4 + 4C_3^2} \right] + 2C_3 \ln \left( \frac{R_4^2}{R_3^2} \cdot \frac{2C_3 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_3^4 + 4C_3^2}}{2C_3 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 R_4^4 + 4C_3^2}} \right) \right\}. \quad (2.11)$$

При  $R_2 < r < R_3$ ,  $0 < z < H$  (в порошке) мощность внутренних сил в единице объема, согласно (1.7), (2.9), равна  $w_2 = \frac{Y}{3} \sqrt{\left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right]} + \frac{12f_1^2 R_3^4 B_1^2}{r^4}$ . Полная мощность:

$$W_2 = (2/3)\pi HY \int_{R_2}^{R_3} \sqrt{\left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right]} + 12f_1^2 R_3^4 B_1^2 / r^4 r dr.$$

Интегрируя, приходим к выражению:

$$\begin{aligned} W_2 = \pi HY R_3^2 / 3 \left\{ \sqrt{\left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right]} + 12f_1^2 B_1^2 - \right. \\ \left. - \sqrt{\left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right]} R_2^4 / R_3^4 + 12f_1^2 B_1^2 + \right. \\ \left. + 2\sqrt{3}f_1 B_1 \ln \left( \frac{R_3^2}{R_2^2} \frac{\sqrt{12}f_1 B_1 + \sqrt{\left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right]} R_2^4 / R_3^4 + 12f_1^2 B_1^2}}{\sqrt{12}f_1 B_1 + \sqrt{\left[ (9f_2^2 - 2f_1^2)(2A + \varepsilon_z)^2 + 6f_1^2(\varepsilon_z^2 + 2A^2) \right]} + 12f_1^2 B_1^2} \right) \right\}. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Пусть  $P$  – внешнее давление. Определим мощность внешних сил. Суммарная мощность внешних сил содержит три составляющих:  $N_1$  – мощность внешних сил на границе  $z = H$ ;  $N_2$  – мощность внешних сил на границе  $r = R_1$ ;  $N_3$  – мощность внешних сил на границе  $r = R_4$ . После соответствующих вычислений получаем:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\pi P V (R_4^2 - R_1^2), \\ N_2 &= 2\pi P R_1 H \left( -1/2\varepsilon_z R_1 + 1/2\varepsilon_z R_2^2 / R_1 + U_1 R_2 / R_1 \right), \\ N_3 &= -2\pi P R_4 H \left( -1/2\varepsilon_z R_4 + 1/2\varepsilon_z R_3^2 / R_4 + U_2 R_3 / R_4 \right). \end{aligned}$$

Суммарная мощность  $N = N_1 + N_2 + N_3$ .

С учетом, что  $\varepsilon_z = V/H$ :

$$N = -PH (R_3^2 - R_2^2) \pi \left[ V/H + 2(U_2 R_3 - U_1 R_2) / (R_3^2 - R_2^2) \right]. \quad (2.13)$$

Из условия  $N = W_1 + W_2 + W_3$  получаем:

$$P = - \frac{W_1 + W_2 + W_3}{H (R_3^2 - R_2^2) \pi \left[ \frac{V}{H} + 2 \left( U_2 \frac{R_3}{R_3^2 - R_2^2} - U_1 \frac{R_2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \right]}. \quad (2.14)$$

Так как скорости определены с точностью до постоянного множителя и в постановке задачи отсутствует характерное время, то можно положить:

$$\left[ \frac{V}{H} + 2 \left( U_2 \frac{R_3}{R_3^2 - R_2^2} - U_1 \frac{R_2}{R_3^2 - R_2^2} \right) \right] = -1. \quad (2.15)$$

Представим внешнее давление  $P$  в виде:

$$P = T_1 M_1 + Y M_2 + T_2 M_3. \quad (2.16)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= T_1 / Y, \quad \beta_2 = T_2 / Y, \\ \alpha_1 &= R_2 / R_1, \quad \alpha_2 = R_3 / R_2, \quad \alpha_3 = R_4 / R_3, \\ \mu_1 &= U_1 / R_2, \quad \mu_2 = U_2 / R_3. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Соотношения (2.15), (2.16) примут вид:

$$P/Y = \beta_1 M_1 + M_2 + \beta_2 M_3, \quad (2.18)$$

$$\varepsilon_z + 2(\alpha_2^2 \mu_2 - \mu_1) / (\alpha_2^2 - 1) = -1. \quad (2.19)$$

Тогда, согласно (2.10)–(2.14), (2.16)–(2.19):

$$\begin{aligned} M_1 = M_1(\mu_1, \varepsilon_z) &= \frac{1}{\sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)} \left\{ \left[ \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2} - \sqrt{\frac{3\varepsilon_z^2}{\alpha_1^4} + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (2\mu_1 + \varepsilon_z) \ln \left( \frac{(2\mu_1 + \varepsilon_z)\alpha_1^2 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \alpha_1^4(2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_1 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} M_3 = M_3(\mu_2, \varepsilon_z) &= \frac{\alpha_2^2}{\sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)} \left\{ \left[ \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2} - \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (2\mu_2 + \varepsilon_z) \ln \left( \alpha_3^2 \frac{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} M_2 = M_2(A, B_1) &= \frac{\alpha_2^2}{3(\alpha_2^2 - 1)} \left\{ \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12f_1^2 B_1^2 - \sqrt{\frac{1}{\alpha_2^4} [9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2] + 12f_1^2 B_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\sqrt{3}f_1 B_1 \ln \frac{\sqrt{12}\alpha_2^2 f_1 B_1 + \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12\alpha_2^4 f_1^2 B_1^2}{\sqrt{12}f_1 B_1 + \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12f_1^2 B_1^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$A = (\mu_2 \alpha_2^2 - \mu_1) / (\alpha_2^2 - 1), \quad B_1 = (\mu_1 - \mu_2) / (\alpha_2^2 - 1). \quad (2.23)$$

### 3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

На каждом шаге процесса ГИП необходимо определить неизвестные величины  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\varepsilon_z$ ,  $P$ . При известных значениях  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  величины  $\varepsilon_z$ ,  $P$  определяются соотношениями (2.18), (2.19). Сами значения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  определяются из условия минимума  $P$  в области, ограниченной линиями  $\mu_1 \geq \mu_2$ ;  $\mu_2 \leq 0$ ,  $\varepsilon_z \leq 0$  на плоскости параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  (рисунок).

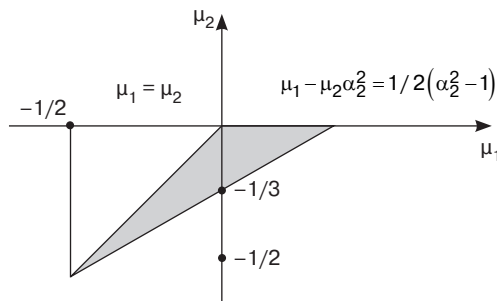


Рисунок. Область отыскания минимума

Согласно (2.18) система уравнений для определения  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  получается из условий:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1} (\beta_1 M_1 + M_2 + \beta_2 M_3) = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu_2} (\beta_1 M_1 + M_2 + \beta_2 M_3) = 0. \quad (3.2)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mu_1} &= 2 / (\alpha_2^2 - 1), \quad \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial \mu_2} = -2\alpha_2^2 / (\alpha_2^2 - 1); \\ \frac{\partial A}{\partial \mu_1} &= -1 / (\alpha_2^2 - 1), \quad \frac{\partial A}{\partial \mu_2} = \alpha_2^2 / (\alpha_2^2 - 1); \\ \frac{\partial B_1}{\partial \mu_1} &= 1 / (\alpha_2^2 - 1), \quad \frac{\partial B_1}{\partial \mu_2} = -1 / (\alpha_2^2 - 1). \end{aligned}$$

Следовательно, соотношения (3.1), (3.2) примут вид:

$$\beta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} + \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_1}{(\alpha_2^2 - 1)} - \frac{\partial M_2}{\partial A} \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\partial M_2}{\partial B_1} \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_2}{(\alpha_2^2 - 1)} = 0, \quad (3.3)$$

$$-\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_1 \alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} + \frac{\partial M_2}{\partial A} \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} - \frac{\partial M_2}{\partial B_1} \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} + \beta_2 \frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} - \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} \frac{2\beta_2 \alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} = 0. \quad (3.4)$$

Для указанных выше производных соответствующие соотношения имеют вид:

$$\frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} = \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{(2\mu_1 + \varepsilon_z) \alpha_1^2 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \alpha_1^4 (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_1 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right), \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} &= \\ &= \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \left\{ \ln \left( \frac{(2\mu_1 + \varepsilon_z) \alpha_1^2 + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + \alpha_1^4 (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_1 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right) + \frac{1}{\alpha_1^4} \frac{3\varepsilon_z (\alpha_1^4 - 1)}{\sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2} + \sqrt{3\varepsilon_z^2 / \alpha_1^4 + (2\mu_1 + \varepsilon_z)^2}} \right\}, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \alpha_3^2 \frac{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right), \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \left\{ \ln \left( \alpha_3^2 \frac{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}}{(2\mu_2 + \varepsilon_z) + \sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{3\varepsilon_z(\alpha_3^4 - 1)}{\sqrt{3\varepsilon_z^2 \alpha_3^4 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2} + \sqrt{3\varepsilon_z^2 + (2\mu_2 + \varepsilon_z)^2}} \right\}, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial A} = \frac{4f_1^2(1+3A)(\alpha_2^2+1)}{\alpha_2^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] + 12f_1^2B_1^2} + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2B_1^2}} \right\}, \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial M_2}{\partial B_1} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} f_1 \left[ \ln \left( \alpha_2^2 \frac{\sqrt{12}f_1B_1 + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2B_1^2}}{\sqrt{12}f_1B_1 + \sqrt{\left[9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2\right] + 12f_1^2B_1^2}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.3) неявно при заданном значении  $\mu_2$  определяет  $\mu_1$ . При определенных условиях уравнение может не иметь решения в исследуемой области параметров, и тогда значение  $\mu_1$  находится на границе области. То есть, можно утверждать с учетом высказанного выше замечания, что уравнение (3.3) неявно определяет  $\mu_1$  как функцию  $\mu_2$ , т.е.  $-\mu_1 = \mu_1(\mu_2)$ . Тогда, используя уравнение (3.4), с учетом того, что  $\mu_1 = \mu_1(\mu_2)$ , можно определить  $\mu_2$ . Опять же уравнение может и не иметь решения, и точка минимума может находиться на границе области. Знание параметров  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  позволяет определить все остальные параметры процесса. Для определения характера изменения параметров трубы осталось выяснить, что имелось в виду под понятием времени, когда принималось условие (2.20). Из закона сохранения массы порошкового материала следует:

$$\rho\pi H(R_3^2 - R_2^2) = \rho_0\pi H_0(R_{30}^2 - R_{20}^2),$$

где  $\rho_0$  – начальная относительная плотность;  $R_{20}$ ,  $R_{30}$  – начальные размеры трубы.

Дифференцируя данное соотношение, после некоторых упрощений получаем:

$$d\rho H(R_3^2 - R_2^2) + \rho V(R_3^2 - R_2^2)dt + 2\rho H(R_3U_2 - R_2U_1)dt = 0. \quad (3.11)$$

Преобразуем его к виду

$$d\rho/\rho + [\varepsilon_z + 2(\alpha_2^2\mu_2 - \mu_1)/(\alpha_2^2 - 1)]dt = 0. \quad (3.12)$$

Тогда, учитывая (2.19), имеем:

$$dt = d\rho/\rho. \quad (3.13)$$

Следовательно, в качестве параметра процесса вместо времени  $t$  может быть взята относительная плотность порошкового материала  $\rho$ . Тогда законы изменения значений  $H$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  определяются соотношениями:

$$dH = \varepsilon_z H dt \Rightarrow dH = \varepsilon_z H d\rho/\rho \Rightarrow dH/d\rho = \varepsilon_z H/\rho, \quad (3.14)$$

$$dR_2 = U_1 dt \Rightarrow dR_2 = \mu_1 R_2 d\rho/\rho \Rightarrow dR_2/d\rho = \mu_1 R_2/\rho, \quad (3.15)$$

$$dR_3 = U_2 dt \Rightarrow dR_3 = \mu_2 R_3 d\rho / \rho \Rightarrow dR_3 / d\rho = \mu_2 R_3 / \rho. \quad (3.16)$$

При известных  $H, R_2, R_3$  значения  $R_1, R_4$  определяются из условия несжимаемости материала капсулы.

$$\pi(R_2^2 - R_1^2)H = \pi(R_{20}^2 - R_{10}^2)H_0, \quad (3.17)$$

$$\pi(R_4^2 - R_3^2)H = \pi(R_{40}^2 - R_{30}^2)H_0, \quad (3.18)$$

где  $R_{10}, R_{40}$  – начальные размеры трубы.

В табл. 1 приведены результаты расчета процесса ГИП трубы с исходными параметрами – начальными размерами в миллиметрах:  $R_{10} = 18, R_{20} = 20, R_{30} = 30, R_{40} = 32, H_0 = 100$ , начальная относительная плотность  $\rho_0 = 0.6$ .

При расчете принимались следующие значения функций:

$$f_1(\rho) = \sqrt{(\rho - \rho_0) / (1 - \rho_0)},$$

$$f_2(\rho) = \sqrt{(\rho - \rho_0) / (1 - \rho)}.$$

**Таблица 1.** Результаты расчета параметров как функции относительной плотности

| $\rho$       | 0.659 | 0.719 | 0.778 | 0.838 | 0.897 | 0.937 | 0.977 |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P/Y$        | 0.447 | 0.682 | 0.932 | 1.249 | 1.742 | 2.357 | 4.083 |
| $H/H_0$      | 0.977 | 0.954 | 0.933 | 0.915 | 0.898 | 0.889 | 0.882 |
| $R_1/R_{10}$ | 0.976 | 0.949 | 0.923 | 0.901 | 0.881 | 0.870 | 0.863 |
| $R_2/R_{20}$ | 0.983 | 0.963 | 0.946 | 0.930 | 0.916 | 0.909 | 0.905 |
| $R_3/R_{30}$ | 0.973 | 0.948 | 0.925 | 0.905 | 0.887 | 0.876 | 0.867 |
| $R_4/R_{40}$ | 0.978 | 0.957 | 0.939 | 0.923 | 0.909 | 0.900 | 0.893 |

Приведем еще один пример расчета соотношений начальных и конечных размеров при других условиях.  $\beta_1 = \beta_2 = 2/9, R_{10} = 15, R_{20} = 20, R_{30} = 30, R_{40} = 45, H_0 = 100, \rho_0 = 0.6, \rho = 0.978, P/Y = 4.309, H/H_0 = 1, R_1/R_{10} = 1, R_2/R_{20} = 1, R_3/R_{30} = 0.886, R_4/R_{40} = 0.918$ .

В последнем случае усадка для порошка носила направленный в сторону уменьшения радиуса характер. Вертикальная усадка не наблюдалась. Внутренняя капсула оставалась недеформируемой. Минимум достигался на границе области.

#### 4. ВОЗМОЖНОСТЬ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Традиционно функции  $f_1(\rho), f_2(\rho)$  определяются на основании двух экспериментов [25, 26]. Первый эксперимент – процесс ГИП цилиндрического образца в тонкостенной капсуле до определенной относительной плотности  $\rho$ . Второй – свободная осадка полученного образца после удаления капсулы. При этом надо исходить из того, что первый эксперимент (он считается основным для определения функции  $f_2(\rho)$ ) из-за влияния капсулы не обеспечивает равномерное всестороннее сжатие. Второй эксперимент – осадка (он считается основным для определения функции  $f_1(\rho)$ ) не прост в осуществлении, особенно при малых значениях относительной плотности  $\rho$ . Вторым недостатком эксперимента на свободную осадку цилиндрического образца состоит в следующем. В реальном процессе ГИП все деформации в подавляющем большинстве случаев носят сжимающий характер, а в эксперименте на осадку две деформации из трех главных носят характер растяжения. Как показано в [27], реальный вектор главных скоростей деформаций в процессе ГИП составляет существенно меньший угол с вектором равномерного сжатия по сравнению с полученным при свободной осадке. Идеальным в этом плане является эксперимент по одномерному прессованию порошкового слоя, однако в силу технических проблем он трудноосуществим. В [27–29] показано, что существует принципиальная возможность определять обе функции в одном эксперименте, если в каждый момент эксперимента знать отношение скоростей деформации. В [28] показана принципиальная возможность определять искомые

функции на основании экспериментов с одними и теми цилиндрическими образцами, прерванных при разных значениях относительной плотности. Недостаток этих экспериментов стоит в том, что их результаты лежат довольно близко от гидростатической оси (равномерное всестороннее сжатие). Использование трубчатых образцов позволяет в определенной степени устранить этот недостаток. Цель настоящего раздела состоит в определении принципиальной возможности определения функций  $f_1(\rho), f_2(\rho)$ .

Складывая соотношения (3.3) и (3.4), получаем:

$$\beta_1 \partial M_1 / \partial \mu_1 - 2\beta_1 \partial M_1 / \partial \varepsilon_z + \partial M_2 / \partial A + \beta_2 \partial M_3 / \partial \mu_2 - 2\beta_2 \partial M_3 / \partial \varepsilon_z = 0. \quad (4.1)$$

Используя (3.9), перепишем уравнение (4.1) в виде:

$$\frac{4f_1^2(1+3A)(\alpha_2^2+1)}{\alpha_2^2 \left\{ \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} + 12f_1^2 B_1^2 + \sqrt{9f_2^2 + 4f_1^2(1+3A)^2} \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2 B_1^2 \right\}} =$$

$$= -\beta_1 \partial M_1 / \partial \mu_1 + 2\beta_1 \partial M_1 / \partial \varepsilon_z - \beta_2 \partial M_3 / \partial \mu_2 + \beta_2 \partial M_3 / \partial \varepsilon_z. \quad (4.2)$$

Обозначим:

$$\Psi_1 = \varepsilon_z / \mu_2, \quad \Psi_2 = \mu_1 / \mu_2. \quad (4.3)$$

Тогда

$$(3A+1) / B_1 = \Delta_1 = (\alpha_2^2 - \Psi_2) / (\Psi_2 - 1) - \Psi_1 (\alpha_2^2 - 1) / (\Psi_2 - 1), \quad (4.4)$$

$$1 / B_1 = \Delta_2 = -\Psi_1 (\alpha_2^2 - 1) / (\Psi_2 - 1) - 2(\alpha_2^2 - \Psi_2) / (\Psi_2 - 1). \quad (4.5)$$

Согласно (3.5)–(3.10), (4.3)–(4.5) получаем

$$\frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} = \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \frac{-(2\Psi_2 + \Psi_1)\alpha_1^2 + \sqrt{3\Psi_1^2 + \alpha_1^4(2\Psi_2 + \Psi_1)^2}}{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}} \right),$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \left( \alpha_3^2 \frac{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2}}{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2}} \right),$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} = \frac{1}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left\{ \ln \left( \alpha_1^2 \frac{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \frac{1}{\alpha_1^4} + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}}{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}} \right) - \frac{3\Psi_1(\alpha_1^4 - 1)}{\alpha_1^4 \left[ \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} + \sqrt{3\Psi_1^2 \frac{1}{\alpha_1^4} + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} \right]} \right\},$$

$$\frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} = \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \sqrt{\frac{1}{3}} \times$$

$$\times \left\{ \ln \left( \alpha_3^2 \frac{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2}}{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2}} \right) - \frac{3\Psi_1(\alpha_3^4 - 1)}{\left[ \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2} + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2} \right]} \right\}.$$

Пусть  $x^2 = \left[ (3/4)\Delta_2^2 f_2^2 + (1/3)\Delta_1^2 f_1^2 \right]$ . Тогда, согласно (4.2):

$$\frac{f_1^2}{\sqrt{x^2 + f_1^2} + \sqrt{x^2 \gamma^2 + f_1^2}} = \Omega_1(\Psi_1, \Psi_2), \quad (4.6)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_2^2} < 1; \quad \Omega_1(\Psi_1, \Psi_2) = \frac{\alpha_2^2 \sqrt{3}}{2\Delta_1(\alpha_2^2 + 1)} \left( -\beta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \mu_1} + 2\beta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \varepsilon_z} - \beta_2 \frac{\partial M_3}{\partial \mu_2} + 2\beta_2 \frac{\partial M_3}{\partial \varepsilon_z} \right). \quad (4.7)$$

Обозначим

$$z = x/f_1. \quad (4.8)$$

Следовательно, имеем:

$$f_1 \left( \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} \right) = \Omega_1. \quad (4.9)$$

Уравнение (2.19) представим в виде:

$$M_2 = P/Y - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3. \quad (4.10)$$

Согласно (4.7), (2.23), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2^2}{(\alpha_2^2 - 1)} \frac{1}{3} \left\{ \sqrt{\left[ 9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] + 12f_1^2 B_1^2} - \sqrt{\left[ 9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2 B_1^2} + \right. \\ & \left. + 2\sqrt{3} f_1 B_1 \ln \left( \alpha_2^2 \frac{\sqrt{12} f_1 B_1 + \sqrt{\left[ 9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] \frac{1}{\alpha_2^4} + 12f_1^2 B_1^2}}{\sqrt{12} f_1 B_1 + \sqrt{\left[ 9f_2^2 + 4f_1^2(1 + 3A)^2 \right] + 12f_1^2 B_1^2}} \right) \right\} = \frac{P}{Y} - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3. \end{aligned}$$

С учетом (4.3)–(4.5), (4.8) преобразуем данное уравнение к виду:

$$\sqrt{x^2 + f_1^2} - \sqrt{x^2 \gamma^2 + f_1^2} + f_1 \ln \left( \frac{1}{\gamma} \frac{f_1 + \sqrt{x^2 \gamma^2 + f_1^2}}{f_1 + \sqrt{x^2 + f_1^2}} \right) = \frac{\sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)\Delta_2}{2\alpha_2^2} \left( \frac{P}{Y} - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3 \right). \quad (4.11)$$

Заметим, что согласно (4.3), (2.21), (2.22)

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\Psi_1(\alpha_2^2 - 1) + 2(\alpha_2^2 - \Psi_2)} \left\{ \left[ \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} - \sqrt{3\Psi_1^2 \frac{1}{\alpha_1^4} + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2} \right] - \right. \\ & \quad \left. - (2\Psi_2 + \Psi_1) \ln \left( \frac{-(2\Psi_2 + \Psi_1)\alpha_1^2 + \sqrt{3\Psi_1^2 + \alpha_1^4(2\Psi_2 + \Psi_1)^2}}{-(2\Psi_2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2\Psi_2 + \Psi_1)^2}} \right) \right\}, \\ M_3 &= \sqrt{\frac{1}{3}} \frac{\alpha_2^2}{\Psi_1(\alpha_2^2 - 1) + 2(\alpha_2^2 - \Psi_2)} \left\{ \left[ \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2} - \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2} \right] - \right. \\ & \quad \left. - (2 + \Psi_1) \ln \left( \alpha_3^2 \frac{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 + (2 + \Psi_1)^2}}{-(2 + \Psi_1) + \sqrt{3\Psi_1^2 \alpha_3^4 + (2 + \Psi_1)^2}} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (4.11) может быть представлено в виде:

$$f_1 \left\{ \sqrt{z^2 + 1} - \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} + \ln \frac{1}{\gamma} \frac{1 + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}} \right\} = \Omega_2(\Psi_1, \Psi_2), \quad (4.12)$$

где  $\Omega_2 = \sqrt{3}(\alpha_2^2 - 1)\Delta_2 / (2\alpha_2^2)(P/Y - \beta_1 M_1 - \beta_2 M_3)$ .

Из уравнений (4.9), (4.12) следует

$$\left( \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} \right) \left\{ \sqrt{z^2 + 1} - \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} + \ln \left( \frac{1}{\gamma} \frac{1 + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}} \right) \right\} = \Omega(\Psi_1, \Psi_2), \quad (4.13)$$

где  $\Omega(\Psi_1, \Psi_2) = \Omega_2 / \Omega_1$ .

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \left( \sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} \right) \left\{ \sqrt{z^2 + 1} - \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1} + \ln \left( \frac{1}{\gamma} \frac{1 + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1}}{1 + \sqrt{z^2 + 1}} \right) \right\}.$$

Данная функция является монотонно возрастающей при  $z > 0$ . Следовательно, уравнение (4.13) имеет единственное решение  $z > 0$  при условии, что  $f(0) < \Omega$ .

Пусть  $H^-, H^+; R_2^-, R_2^+; R_3^-, R_3^+$  – предыдущее и последующее значения соответствующих параметров. Тогда в качестве  $\varepsilon_z, \mu_1, \mu_2$  могут быть приняты:

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &\approx 2(H^+ - H^-) / (H^+ + H^-), \\ \mu_1 &\approx 2(R_2^+ - R_2^-) / (R_2^+ + R_2^-), \\ \mu_2 &\approx 2(R_3^+ - R_3^-) / (R_3^+ + R_3^-). \end{aligned}$$

Следовательно, имеем  $\Psi_1 \approx \varepsilon_z / \mu_2; \Psi_2 \approx \mu_1 / \mu_2$ .

Если найдено значение  $z$ , то  $f_1 = H_1(\sqrt{z^2 + 1} + \sqrt{z^2 \gamma^2 + 1})$ . Поскольку  $x^2 = z^2 f_1^2$ , то из соотношения  $(3/4)\Delta_2^2 f_2^2 + (1/3)\Delta_1^2 f_1^2 = z^2 f_1^2$  имеем:

$$f_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(z^2 - \Delta_1^2 / 3)}{\Delta_2^2}} f_1.$$

Ниже приведены результаты приближенного определения функций на основании расчета в условиях, которые использовались в табл. 1.

**Таблица 2.** Исходные данные для расчета функций  $f_1(\rho), f_2(\rho)$

| Параметры | 1 (начальное состояние) | 2       | 3       | 4       |
|-----------|-------------------------|---------|---------|---------|
| $\rho$    | 0.6198                  | 0.6396  | 0.6594  | 0.6792  |
| $P/Y$     | 0.2544                  | 0.3594  | 0.4468  | 0.5272  |
| $H$       | 99.2634                 | 98.4711 | 97.6770 | 96.8966 |
| $R_2$     | 19.9027                 | 19.7805 | 19.6517 | 19.5218 |
| $R_3$     | 29.7277                 | 29.4550 | 29.1885 | 28.9299 |

За начальное состояние принималось значение, представленное в столбце 1 табл. 2.

1. Конечное состояние – столбец 2. Приращение относительной плотности 2%. Теоретические значения:  $f_2 = 0.3324, f_1 = 0.3154$ . Расчетные значения:  $f_2 = 0.3329, f_1 = 0.3180$ .
2. Конечное состояние – столбец 3. Приращение относительной плотности 4%. Теоретические значения:  $f_2 = 0.4184, f_1 = 0.3860$ . Расчетные значения:  $f_2 = 0.42281, f_1 = 0.3646$ .
3. Конечное состояние – столбец 4. Приращение относительной плотности 6%. Теоретические значения:  $f_2 = 0.4977, f_1 = 0.4455$ . Расчетные значения:  $f_2 = 0.5026, f_1 = 0.4079$ .

Как видно из представленных результатов, даже при шаге относительной плотности 6%, получаем вполне приемлемое совпадение теоретических и расчетных данных.

Следует отметить, однако, что приведенный метод определения функций неприемлем, если реализуется плоская деформация (см. второй пример расчета). В этом случае, как правило, одна из стенок капсулы остается недеформируемой. То есть, она находится в жестком состоянии. А в этом случае уравнения для определения функций уже неверны, поскольку минимум достигается на границе области, а уравнения (4.1), (4.10) получены в предположении, что вся система деформируется.

## ВЫВОДЫ

Разработана модель процесса ГИП для порошковой трубы. Для описания механических свойств порошкового материала принята модель Грина, для материала капсулы – модель идеально пластического тела с условием несжимаемости. Применение этой модели требует знания следующих механических характеристик материалов: предела текучести материалов капсулы, предела текучести монолита порошкового материала, двух экспериментально определяемых функций относительной плотности  $f_1(\rho)$ ,  $f_2(\rho)$ . Модель позволяет анализировать различные возможные варианты процесса – полное деформирование системы и вариант плоской деформации с одной неподвижной границей. Применение данной модели позволяет использовать сравнительно простой математический аппарат.

Показана принципиальная возможность использования трубчатых образцов для экспериментального определения функций, входящих в условие текучести Грина.

### Вклад авторов

**В.А. Головешкин, В.Н. Самаров, Ж. Рейссон** – постановка задачи, создание математической модели, исследование модели, анализ результатов.

**А.А. Николаенко, Д.М. Фисунова** – исследование модели, проведение расчетов, анализ результатов.

### Authors' contributions

**V.A. Goloveshkin, V.N. Samarov, G. Raison** – problem statement, mathematical model creation, model research, analysis of results.

**A.A. Nickolaenko, D.M. Fisunova** – model research, calculations, analysis of results.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохина А.В., Головешкин В.А., Самаров В.Н., Селиверстов Д.Г., Raison G. Математическая модель расчета процесса горячего изостатического прессования деталей сложной формы при наличии периодической структуры закладных элементов. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2002;8(2):245–254. <https://elibrary.ru/jwprwnd>
2. Ильющин А.А. *Пластичность. Основы общей математической теории*. СПб.: Ленанд; 2020. 272 с. ISBN 978-5-9710-7092-4
3. Ильющин А.А. *Механика сплошной среды*. М.: Изд-во МГУ; 1990. 312 с. ISBN 5-211-00940-1
4. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*. 1979;29(1):47–65. <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>
5. Гордон В.А., Шоркин В.С. Нелокальная теория приповерхностного слоя твердого тела. В сб.: *Итоги развития механики в Туле. Международная конференция: Тезисы докладов*. Тула: ТулГУ; 1998. С. 24.
6. Гордон В.А., Шоркин В.С. Нелокальная теория приповерхностного слоя твердого тела. *Известия ТулГУ. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 1998;4(2):55–57.
7. Ломакин В.А. *Статистические задачи механики твердых деформируемых тел*. М.: Наука; 1970. 138 с.
8. Бальшин М.Ю., Кипарисов С.С. *Основы порошковой металлургии*. М.: Металлургия; 1978. 184 с.
9. Бальшин М.Ю. *Научные основы порошковой металлургии и металлургии волокна*. М.: Металлургия; 1972. 336 с.
10. Федорченко И.М., Андриевский Р.А. *Основы порошковой металлургии*. Киев: Изд-во АН УССР; 1963. 420 с.
11. Ильющин А.А. *Пластичность. Ч. 1. Упруго-пластические деформации*. М.; Л.: Гостехиздат; 1948. 376 с.
12. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. М.: Наука; 1969. 420 с.
13. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. М.: Высшая Школа; 1969. 608 с.
14. Хилл Р. *Математическая теория пластичности*: пер. с англ. М.: Гостехиздат; 1956. 408 с.
15. Фрост Г., Эшби М.Ф. *Карты механизмов деформаций*: пер. с англ. Челябинск: Металлургия; 1989. 327 с.

16. Arzt E., Ashby M.F., Easterling K.E. Practical application of Hot-Isostatic Pressing diagrams: four case studies. *Metall. Trans.* 1983;14A(1):211–221. <https://doi.org/10.1007/BF02651618>
17. Ashby M.F. A first report of sintering diagrams. *Acta Metall.* 1974;22(3):275–289. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(74\)90167-9](https://doi.org/10.1016/0001-6160(74)90167-9)
18. Helle A.S., Easterling K.E., Ashby M.F. Hot Isostatic Pressing diagrams: New development. *Acta Metall.* 1985;33(12):2163–2174. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90177-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90177-4)
19. Друянов Б.А. *Прикладная теория пластичности пористых тел*. М.: Машиностроение; 1989. 168 с.
20. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.* 1972;14(4):215–224. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
21. Штерн М.Б., Сердюк Г.Г., Максименко Л.А., Трухан Ю.В., Шуляков Ю.М. *Феноменологические теории прессования порошков*. Киев: Наукова думка; 1982. 140 с.
22. Скороход В.В. *Реологические основы теории спекания*. Киев: Наукова думка; 1972. 152 с.
23. Goloveshkin V.A., Kazberovich A.M., Samarov V.N., Seliverstov D.G. New Regularities of the Shape-Changing of Hollow Parts During HIP. In: Koizumi M. (Ed.). *Hot Isostatic Pressing Theory and Applications*. Springer; 1992. P. 281–287. [https://doi.org/10.1007/978-94-011-2900-8\\_43](https://doi.org/10.1007/978-94-011-2900-8_43)
24. Анохина А.В., Головешкин В.А., Пирумов А.Р., Флакс М.Я. Исследование начального процесса прессования труб из порошковых материалов с учетом вертикальной усадки. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2003;9(2):123–132.
25. Dutton R.E., Shamasundar S., Semiatin S.L. Modeling the Hot Consolidation of Ceramic and Metal Powders. *Metall. Mater. Trans. A*. 1995;26A:2041–2051. <https://doi.org/10.1007/BF02670676>
26. Власов А.В., Селиверстов Д.Г. Определение функций пластичности порошковых материалов, применяемых при ГИП. В сб.: *Исследование в области теории, технологии и оборудования штамповочного производства: Сб. научных трудов*. Тула; 1998. С. 46–49.
27. Raison G., Goloveshkin V., Samarov V. Identification of Porous Materials Rheological Coefficient Using Experimental Determination of the Radial and Longitudinal Strain Rate Ratio. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 150–159. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-21>
28. Raison G., Goloveshkin V., Khomyakov E., Samarov V. Effect of Experimental Determination Process on Shear Stress Coefficient of Green Equation Describing HIP. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 172–176. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-24>
29. Bochkov A., Kozyrev Yu., Ponomarev A., Raison G. Theoretical Evaluation of Capsule Material Strain Hardening on the Deformation of Long Cylindrical Blanks During HIP Process. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 177–183. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-25>

## REFERENCES

1. Anokhina A.V., Goloveshkin V.A., Samarov V.N., Seliverstov D.G., Raison G. A Mathematical model for calculating the process of hot isostatic pressing of parts of complex-shaped parts in the presence of a periodic structure of embedded elements. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii = Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2002;8(2):245–254 (in Russ.). <https://elibrary.ru/jwpwnd>
2. Plyushin A.A. *Plastichnost'. Osnovy obshchei matematicheskoi teorii (Plasticity. Fundamentals of General Mathematical Theory)*. St. Petersburg: Lenand; 2020. 272 p. (in Russ.). ISBN 978-5-9710-7092-4
3. Plyushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy (Continuum Mechanics)*. Moscow: MSU; 1990. 310 p. (in Russ.). ISBN 5-211-00940-1
4. Cundall P.A., Strack O.D.L. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*. 1979;29(1):47–65. <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>
5. Gordon V.A., Shorkin V.S. The nonlocal theory of the near-surface layer of a solid. In: *Results of the Development of Mechanics in Tula. International Conference: Abstracts of the Reports*. Tula; 1998. P. 24 (in Russ.).
6. Gordon V.A., Shorkin V.S. The nonlocal theory of the near-surface layer of a solid. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Bulletin of Tula State University. Series: Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 1998;4(2):55–57 (in Russ.).
7. Lomakin V.A. *Statisticheskie zadachi mekhaniki tverdykh deformiruemyykh tel (Statistical Problems of Mechanics of Solid Deformable Bodies)*. Moscow: Nauka; 1970. 138 p. (in Russ.).
8. Balshin M.Yu., Kiparisov S.S. *Osnovy poroshkovoi metallurgii (Fundamentals of Powder Metallurgy)*. Moscow: Metallurgiya; 1978. 184 p. (in Russ.).
9. Balshin M.Yu. *Nauchnye osnovy poroshkovoi metallurgii i metallurgii volokna (Scientific Foundations of Powder Metallurgy and Fiber Metallurgy)*. Moscow: Metallurgiya; 1972. 336 p. (in Russ.).
10. Fedorchenko I.M., Andrievskii R.A. *Osnovy poroshkovoi metallurgii (Fundamentals of Powder Metallurgy)*. Kiev: Publishing House of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR; 1963. 420 p. (in Russ.).
11. Plyushin A.A. *Plastichnost'. Ch. 1. Uprugo-plasticheskie deformatsii (Plasticity. Part 1. Elastic-plastic deformations)*. Moscow; Leningrad: Gostekhizdat; 1948. 376 p. (in Russ.).
12. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti (Fundamentals of the Theory of Plasticity)*. Moscow: Nauka; 1969. 420 p. (in Russ.).

13. Sokolovskii V.V. *Teoriya plastichnosti (Theory of Plasticity)*. Moscow: Vysshaya Shkola; 1969. 608 p. (in Russ.).
14. Hill R. *Matematicheskaya teoriya plastichnosti (Mathematical Theory of Plasticity)*: transl. from Engl. Moscow: Gostekhizdat; 1956. 408 p. (in Russ.).  
[Hill R. *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford: Clarendon Press; 1950. 356 p.]
15. Frost H.J., Ashby M.F. *Karty mekhanizmov deformatsiy (Deformation Mechanism Maps)*: transl. from Engl. Chelyabinsk: Metallurgiya; 1989. 327 p. (in Russ.).  
[Frost H.J., Ashby M.F. *Deformation Mechanism Maps*. Oxford: Pergamon Press; 1982.]
16. Arzt E., Ashby M.F., Easterling K.E. Practical application of Hot-Isostatic Pressing diagrams: four case studies. *Metall. Trans.* 1983;14A(1):211–221. <https://doi.org/10.1007/BF02651618>
17. Ashby M.F. A first report of sintering diagrams. *Acta Metall.* 1974;22(3):275–289. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(74\)90167-9](https://doi.org/10.1016/0001-6160(74)90167-9)
18. Helle A.S., Easterling K.E., Ashby M.F. Hot Isostatic Pressing diagrams: New development. *Acta Metall.* 1985;33(12):2163–2174. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(85\)90177-4](https://doi.org/10.1016/0001-6160(85)90177-4)
19. Druyanov B.A. *Prikladnaya teoriya plastichnosti poristykh tel (Applied Theory of Plasticity of Porous Bodies)*. Moscow: Mashinostroyeniye; 1989. 168 p. (in Russ.).
20. Green R.J. A plasticity theory for porous solids. *Int. J. Mech. Sci.* 1972;14(4):215–224. [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90063-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90063-X)
21. Shtern M.B., Serdyuk G.G., Maksimenko L.A., et al. *Fenomenologicheskie teorii pressovaniya poroshkov (Phenomenological Theories of Powder Pressing)*. Kiev: Naukova dumka; 1982. 140 p. (in Russ.).
22. Skorokhod V.V. *Reologicheskie osnovy teorii spekaniya (Rheological Foundations of Sintering Theory)*. Kiev: Naukova dumka; 1972. 152 p. (in Russ.).
23. Goloveshkin V.A., Kazberovich A.M., Samarov V.N., Seliverstov D.G. New Regularities of the Shape-Changing of Hollow Parts During HIP. In: Koizumi M. (Ed.). *Hot Isostatic Pressing Theory and Applications*. Springer; 1992. P. 281–287. [https://doi.org/10.1007/978-94-011-2900-8\\_43](https://doi.org/10.1007/978-94-011-2900-8_43)
24. Anokhina A.V., Goloveshkin V.A., Pirumov A.R., Flaks M.Ya. Investigation of the initial process of pressing pipes made of powder materials, taking into account vertical shrinkage. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktiv = Mechanics of Composite Materials and Structures*. 2003;9(2):123–132 (in Russ.).
25. Dutton R.E., Shamasundar S., Semiatin S.L. Modeling the Hot Consolidation of Ceramic and Metal Powders. *Metall. Mater. Trans. A*. 1995;26A:2041–2051. <https://doi.org/10.1007/BF02670676>
26. Vlasov A.V., Seliverstov D.G. Determination of the plasticity functions of powder materials used in HIP. In: *Research in the Field of Theory, Technology and Equipment for Stamping Production: Collection of Scientific Papers*. Tula; 1998. P. 46–49 (in Russ.).
27. Raison G., Goloveshkin V., Samarov V. Identification of Porous Materials Rheological Coefficient Using Experimental Determination of the Radial and Longitudinal Strain Rate Ratio. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 150–159. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-21>
28. Raison G., Goloveshkin V., Khomyakov E., Samarov V. Effect of Experimental Determination Process on Shear Stress Coefficient of Green Equation Describing HIP. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 172–176. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-24>
29. Bochkov A., Kozyrev Yu., Ponomarev A., Raison G. Theoretical Evaluation of Capsule Material Strain Hardening on the Deformation of Long Cylindrical Blanks During HIP Process. In: *Hot Isostatic Pressing – HIP'22. Materials Research Proceedings*. 2023. V. 38. P. 177–183. <https://doi.org/10.21741/9781644902837-25>

## Об авторах

**Головешкин Василий Адамович**, д.т.н., профессор, кафедра высшей математики, Институт кибербезопасности и цифровых технологий, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78); ведущий научный сотрудник, ФГБУН «Институт прикладной механики Российской академии наук» (125040, Россия, Москва, Ленинградский пр-т, д. 7, стр. 1). E-mail: vag-1953@yandex.ru. Scopus Author ID 6602872377, <https://orcid.org/0000-0002-5413-8625>

**Николаенко Артем Андреевич**, студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: temanickolaenko2004@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0003-2483-4392>

**Самаров Виктор Наумович**, д.т.н., технический директор, ТОО «Лаборатория Новых Технологий» (117556, Россия, Москва, Симферопольский б-р, д. 15). E-mail: Samarov13@Aol.com. Scopus Author ID 6603606878

**Рейссон Жерар**, консультант, Клермон Ферран, Франция. E-mail: gerard.raisson@gmail.com. Scopus Author ID 6603152593

**Фисунова Дарья Михайловна**, студент, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет» (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: daria.fisunova@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0008-2857-3499>

#### About the authors

**Vasiliy A. Goloveshkin**, Dr. Sci. (Eng.), Professor, Higher Mathematics Department, Institute of Cybersecurity and Digital Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia); Leading Researcher, Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences (7-1, Leningradskii pr., Moscow, 125040 Russia). E-mail: vag-1953@yandex.ru. Scopus Author ID 6602872377, <https://orcid.org/0000-0002-5413-8625>

**Artem A. Nickolaenko**, Student, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: temanickolaenko2004@yandex.ru. <https://orcid.org/0009-0003-2483-4392>

**Victor N. Samarov**, Dr. Sci. (Eng.), Technical Director, Laboratory of New Technologies (15, Simferopol'skii bul., Moscow, 117556 Russia). E-mail: Samarov13@Aol.com. Scopus Author ID 6603606878

**Gerard Raison**, Retired Consultant, Clermond Ferrand, France, E-mail: gerard.raisson@gmail.com. Scopus Author ID 6603152593

**Daria M. Fisunova**, Student, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: daria.fisunova@gmail.com. <https://orcid.org/0009-0008-2857-3499>