

Математическое моделирование  
Mathematical modeling

УДК 519.673

<https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-102-112>

EDN YBOYBL



НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

## Нейронные операторы для гидродинамического моделирования подземных хранилищ газа

Д.Д. Сирота<sup>@</sup>,  
К.А. Гуцин,  
С.А. Хан,  
С.Л. Костиков,  
К.А. Бутов

ПАО «Газпром», Санкт-Петербург, 197229 Россия

<sup>@</sup> Автор для переписки, e-mail: [D.Sirota@adm.gazprom.ru](mailto:D.Sirota@adm.gazprom.ru)

### Резюме

**Цели.** Значительная часть исследований в области глубокого обучения сосредоточена на изучении отображений между конечномерными пространствами. Гидродинамические процессы фильтрации газа в подземных хранилищах, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП), требуют изучения отображений между функциональными пространствами бесконечной размерности, что отличает данную задачу от традиционных. Одним из перспективных подходов является построение нейронных операторов – обобщение нейронных сетей для аппроксимации отображений между функциональными пространствами. Цель работы – создание нейронного оператора для ускорения расчетов гидродинамического моделирования подземных хранилищ газа (ПХГ) при допустимых потерях точности.

**Методы.** В работе построен и обучен модифицированный нейронный оператор Фурье для гидродинамического моделирования процессов фильтрации газа в ПХГ.

**Результаты.** Показано, что данный метод может быть успешно применен для задач трехмерной фильтрации газа в декартовой системе координат на объектах с множеством скважин. Разработанная модель обеспечивает высокое качество при моделировании объектов с неравномерной сеткой дискретизации и сложной геометрией, несмотря на использование в архитектуре алгоритма быстрого преобразования Фурье. При этом нейронному оператору не требуется большой размер обучающей выборки для достижения высокой точности аппроксимации решений ДУЧП, что демонстрируется не только на тестовой выборке, но и на искусственно сгенерированных сценариях с внесением существенных изменений в структуру моделируемого объекта. Обученный нейронный оператор осуществляет моделирование заданного сценария за доли секунды, что, по меньшей мере, в  $10^6$  раз быстрее, чем традиционный численный симулятор.

**Выводы.** Построенный и обученный нейронный оператор показал хорошую эффективность в задаче гидродинамического моделирования ПХГ. Полученный алгоритм воспроизводит адекватные решения даже в случае существенных изменений в моделируемом объекте, которых не было в процессе обучения. Все это делает возможным применение данной модели в задачах планирования и принятия решений в отношении различных аспектов эксплуатации ПХГ, таких как оптимальное использование скважин, контроль давления и управление запасами газа.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, глубокое обучение, искусственный интеллект, нейронные сети, нейронные операторы, нейронные операторы Фурье, гидродинамическое моделирование, подземные хранилища газа

• Поступила: 31.05.2024 • Доработана: 12.07.2024 • Принята к опубликованию: 25.09.2024

**Для цитирования:** Сирота Д.Д., Гушин К.А., Хан С.А., Костиков С.Л., Бутов К.А. Нейронные операторы для гидродинамического моделирования подземных хранилищ газа. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):102–112. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-102-112>

**Прозрачность финансовой деятельности:** Авторы не имеют финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## RESEARCH ARTICLE

# Neural operators for hydrodynamic modeling of underground gas storage facilities

Daniil D. Sirota <sup>@</sup>,  
Kirill A. Gushchin,  
Sergey A. Khan,  
Sergey L. Kostikov,  
Kirill A. Butov

*Gazprom, St. Petersburg, 197229 Russia*

<sup>@</sup> Corresponding author, e-mail: [D.Sirota@adm.gazprom.ru](mailto:D.Sirota@adm.gazprom.ru)

### Abstract

**Objectives.** Much of the research in deep learning has focused on studying mappings between finite-dimensional spaces. While hydrodynamic processes of gas filtration in underground storage facilities can be described by partial differential equations (PDE), the requirement to study the mappings between functional spaces of infinite dimension distinguishes this problem from those solved using traditional mapping approaches. One of the most promising approaches involves the construction of neural operators, i.e., a generalization of neural networks to approximate mappings between functional spaces. The purpose of the work is to develop a neural operator to speed up calculations involved in hydrodynamic modeling of underground gas storages (UGS) to an acceptable degree of accuracy.

**Methods.** In this work, a modified Fourier neural operator was built and trained for hydrodynamic modeling of gas filtration processes in underground gas storages.

**Results.** The described method is shown to be capable of successful application to problems of three-dimensional gas filtration in a Cartesian coordinate system at objects with many wells. Despite the use of the fast Fourier transform algorithm in the architecture, the developed model is also effective for modeling objects having a nonuniform grid and complex geometry. As demonstrated not only on the test set, but also on artificially generated scenarios with significant changes made to the structure of the modeled object, the neural operator does not require a large training dataset size to achieve high accuracy of approximation of PDE solutions. A trained neural operator can simulate a given scenario in a fraction of a second, which is at least  $10^6$  times faster than a traditional numerical simulator.

**Conclusions.** The constructed and trained neural operator demonstrated efficient hydrodynamic modeling of underground gas storages. The resulting algorithm reproduces adequate solutions even in the case of significant changes in the modeled object that had not occurred during the training process. The model can be recommended for use in planning and decision-making purposes regarding various aspects of UGS operation, such as optimal control of gas wells, pressure control, and management of gas reserves.

**Keywords:** mathematical modeling, deep learning, artificial intelligence, neural networks, neural operators, Fourier neural operators, hydrodynamic modeling, underground gas storage facilities

• Submitted: 31.05.2024 • Revised: 12.07.2024 • Accepted: 25.09.2024

**For citation:** Sirota D.D., Gushchin K.A., Khan S.A., Kostikov S.L., Butov K.A. Neural operators for hydrodynamic modeling of underground gas storage facilities. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):102–112. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-102-112>

**Financial disclosure:** The authors have no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The authors declare no conflicts of interest.

## ВВЕДЕНИЕ

Подземные хранилища газа (ПХГ) – технологический комплекс, предназначенный для закачки, хранения и отбора газа, включающий наземные инженерно-технические сооружения; участок недр, ограниченный горным отводом; объект хранения газа; контрольные пласты; буферный объем газа; фонд скважин различного назначения. Гидродинамическое моделирование пластов-коллекторов ПХГ требуется для повышения точности и надежности прогнозирования поведения ПХГ и является неотъемлемой составляющей процессов планирования и принятия решений в отношении различных аспектов эксплуатации ПХГ, таких как оптимальное использование скважин, контроль давления и управление запасами газа.

При моделировании фильтрационных процессов подземного хранения газа могут использоваться упрощенные балансовые модели и более точные численные гидродинамические модели (ГДМ). Использование балансовых моделей, как правило, определяется отсутствием в достаточном количестве исходных данных для построения трехмерных численных моделей или ограниченностью вычислительных мощностей. Такие модели осуществляют решение уравнения фильтрации по пласту-коллектору, используя упрощенные зависимости, не учитывая сложные геологические и гидродинамические процессы, которые могут оказывать значительное влияние на поведение ПХГ. Использование современных гидродинамических симуляторов для численного моделирования процессов фильтрации газа, в свою очередь, позволяет получать более детальную информацию о распределении параметров в пластах-коллекторах ПХГ и оценивать влияние различных факторов на процессы подземного хранения газа. Численные симуляторы, как правило, используют метод конечных объемов для аппроксимации системы дифференциальных уравнений по пространству и неявную схему для аппроксимации по времени для моделирования, что может быть вычислительно затратной процедурой.

В настоящее время для решения задач гидродинамического моделирования ПХГ в основном используются численные ГДМ. В связи с тем, что такие модели могут адаптироваться на накопленную историю

разработки месторождений (в случае создания ПХГ в истощенных месторождениях) и фактическую историю эксплуатации ПХГ, горизонт моделирования и адаптации моделей может составлять более 60 лет. Более того, учитывая значительный объем геолого-промысловых данных, поступающих в ГДМ в качестве исходных (результаты геофизических исследований, замеры давлений, дебиты газа и т.д.), время одного расчета может достигать нескольких часов.

Таким образом, скорость расчетов является одним из определяющих факторов, влияющих на принятие управленческих решений, связанных с распределением закачки/отбора газа по скважинам и по площади. Одним из перспективных подходов к решению вопроса ускорения гидродинамических расчетов является использование современных методов глубокого обучения.

Существенная часть работ в области глубокого обучения посвящена построению отображений между конечномерными (например, евклидовыми) пространствами [1, 2]. Вместе с тем физические процессы фильтрации газа в ПХГ, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных (ДУЧП), требуют изучения отображений между функциональными пространствами бесконечной размерности, что отличает данную задачу от традиционных [3].

Согласно теореме об универсальной аппроксимации [4, 5], полносвязная сеть с достаточным числом параметров потенциально может аппроксимировать любую непрерывную функцию, определенную на компактном множестве, с любой наперед заданной точностью. В [6–8] показаны теоретические возможности аппроксимации нелинейных отображений между функциональными пространствами. Кроме того, в [9] приводятся оценки границ сложности ошибки аппроксимации нейронных сетей, связывающие число параметров модели и размерность задачи со значением ошибки аппроксимации.

Однако из теоретической возможности аппроксимировать отображения между бесконечномерными пространствами не следует информация о том, как это делать эффективно на практике. Известно, что существующие архитектуры нейронных сетей показывают разную производительность в решении специфических задач. Например, те же

полносвязные сети демонстрируют значительно более низкое качество в работе с изображениями по сравнению с широко распространенными сверточными архитектурами [2]. Чтобы глубже исследовать вопрос эффективного обучения нейронных сетей, в [10] приводится декомпозиция общей ошибки модели на три составляющие: ошибку аппроксимации, ошибку оптимизации и ошибку обобщения. Ошибка аппроксимации зависит от количества параметров сети и размерности задачи, ошибка оптимизации связана с функцией потерь, а ошибка обобщения зависит от размера обучающей выборки [11].

Одним из важных моментов при обобщении зависимостей, описываемых ДУЧП с использованием нейронных сетей, является проблема размерности («проклятие размерности») [12, 13], особенно при моделировании объектов со сложной геометрией ПХГ или уравнений с многомерными пространствами параметров (основное уравнение фильтрации газа) [3]. Известно, что моделям глубокого обучения требуется достаточно большой объем обучающей выборки для обобщения основных зависимостей и соотношений. Согласно [11] верхняя граница ошибки обобщения:  $E_{\text{gen}} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$ , где  $N$  – количество тренировочных семплов. Следовательно, для получения относительной ошибки обобщения в 1% необходима выборка размера  $O(10^4)$ .

В случае с моделированием гидродинамических процессов в пластовых системах получение набора данных подобных размеров может оказаться сложной задачей, поскольку набор данных формируется из расчетов на численном симуляторе, что является вычислительно затратной процедурой. Следовательно, с учетом приведенных выше особенностей, разработка архитектуры нейронной сети для эффективного решения задач такого вида является нетривиальным и актуальным вопросом.

В течение последних лет глубокое обучение активно проникает в область научных вычислений, становясь новой парадигмой<sup>1, 2</sup>. Появилось множество методов, которые предлагают более быстрые альтернативы численному моделированию.

Разумеется, существуют работы, основанные на традиционных подходах глубокого обучения в виде построения конечномерных операторов, с использованием результатов численных симуляций в качестве

обучающего набора. Например, в [14–16] исследованы сверточные, рекуррентные и генеративно-состязательные архитектуры для решения задач гидродинамики. Однако представленные методы не используют знания о структуре моделируемых зависимостей и, как следствие, требовательны к геометрии объекта, сетке дискретизации и нуждаются в большом количестве данных.

Группа методов [17–19] относится к специализированному классу алгоритмов, так называемых *физически информированных нейронных сетей*. Данный подход также основан на конечномерных отображениях, но инкорпорирует ДУЧП напрямую в функцию ошибки алгоритма, используя механизм автоматического дифференцирования [20]. Таким образом физика учитывается в процессе обучения, т.к. модель стремится минимизировать невязки между левой и правой частью уравнения, начальными и граничными условиями. Недостатком такого подхода является способность к приближению лишь конкретной реализации ДУЧП. Следовательно, физически информированные нейронные сети не предоставляют существенного ускорения относительно традиционных численных методов для многих прикладных задач.

Альтернативный и относительно новый подход заключается в обучении *нейронных операторов*, которые представляют собой отображения между функциональными пространствами [21–23]. Обученные нейронные операторы могут аппроксимировать любые нелинейные непрерывные операторы, не зависят от сетки дискретизации и требуют лишь однократного обучения, поэтому их можно обучать и оценивать на разных сетках дискретизации и реализациях ДУЧП. Показано, что данные методы обладают лучшей эффективностью в задачах аппроксимации ДУЧП по сравнению с другими существующими подходами, основанными на глубоком обучении, в т.ч. и для задач гидродинамического моделирования.

Обучение операторов в пространствах бесконечной размерности является активной областью исследований. В настоящее время продолжаются работы по повышению эффективности и применимости данного подхода в различных приложениях.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### Математическая модель процесса фильтрации газа

В данной работе рассматривается процесс гидродинамического моделирования ПХГ пористого типа. Для таких объектов различные параметры, описывающие движение газа в пористой среде (фильтрацию), имеют сильную зависимость от времени [3]. Такие процессы называются неустойчивыми (нестационарными).

<sup>1</sup> Lavin A., Krakauer D., Zenil H., et al. *Simulation Intelligence: Towards a New Generation of Scientific Methods*. 2022. <http://arxiv.org/abs/2112.03235>. Дата обращения 25.04.2023. / Accessed April 25, 2023.

<sup>2</sup> Cuomo S., di Cola V.S., Giampaolo F., et al. *Scientific Machine Learning through Physics-Informed Neural Networks: Where we are and What's next*. 2022. <http://arxiv.org/abs/2201.05624>. Дата обращения 25.04.2023. / Accessed April 25, 2023.

Основное уравнение трехмерной неустановившейся однофазной фильтрации сжимаемого флюида (газа) в пористой среде получается путем подстановки закона сохранения импульса (закон фильтрации Дарси) в закон сохранения массы [24]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{A_x k_x}{\mu_g B_g} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{A_y k_y}{\mu_g B_g} \frac{\partial p}{\partial y} \right) \Delta y + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{A_z k_z}{\mu_g B_g} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \Delta z = \frac{V_b \phi T_{sc}}{p_{sc}} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{Z} \right) - q_{gsc}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $p$  – давление;  $q_{gsc}$  – дебит газа в стандартных условиях;  $B_g = \frac{p_{sc} T Z}{T_{sc} p}$  – объемный коэффициент газовой фазы;  $Z$  – коэффициент сверхсжимаемости газа;  $\mu_g$  – вязкость газа;  $T_{sc}$  – температура в стандартных условиях;  $p_{sc}$  – давление в стандартных условиях;  $V_b$  – объем породы;  $\phi$  – пористость;  $k$  – проницаемость;  $A$  – площадь поперечного сечения породы, перпендикулярная направлению фильтрации;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  – длина, ширина и высота объема породы (конечного объема) соответственно.

Вследствие зависимости  $\mu_g$ ,  $B_g$  и  $Z$  от давления ДУЧП (1) является нелинейным и схоже с уравнением диффузии, однако, по своим динамическим характеристикам поток, описываемый данным соотношением, является не диффузионным, а фильтрационным.

### Обучение нейронных операторов

Целью данной работы является аппроксимация уравнения фильтрации газа в ПХГ (1) путем построения нейронного оператора, отображающего между двумя бесконечномерными пространствами из конечного набора пар начальных, граничных условий и решений ДУЧП.

Зафиксируем пространственно-временную размерность  $d \in \mathbb{N}$  и обозначим через  $D \subset \mathbb{R}^d$  область в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда можно рассмотреть отображение, являющееся по своей сути оператором решения ДУЧП:

$$\begin{aligned} G : A(D; \mathbb{R}^{d_a}) & \rightarrow U(D; \mathbb{R}^{d_u}), \\ a \rightarrow u & := G(a), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $a \in A(D; \mathbb{R}^{d_a})$  – функция входных данных вида  $a : D \rightarrow \mathbb{R}^{d_a}$ ;  $u \in U(D; \mathbb{R}^{d_u})$  – функция выходных данных вида  $u : D \rightarrow \mathbb{R}^{d_u}$ .  $A(D; \mathbb{R}^{d_a})$  и  $U(D; \mathbb{R}^{d_u})$  – банаховы пространства.

Для обучения оператора имеется конечное множество пар из начальных, граничных условий

и решений ДУЧП  $\{a_j, u_j\}_{j=1}^N$ , где  $a_j \sim \mu$  ( $\mu$  – вероятностная мера) является последовательностью вероятностных мер, заданных на  $A$  и  $u_j = G(a_j)$ . Данные пары получены из ГДМ действующего ПХГ, которая использует метод конечных объемов для аппроксимации системы дифференциальных уравнений по пространству и неявную схему для аппроксимации по времени. Таким образом, обучение нейронного оператора можно сформулировать следующим образом. Исходные данные, сгенерированные на численном симуляторе, по сути, являются результатом нелинейного отображения, удовлетворяющего уравнению фильтрации газа:  $G(a_j) = u_j$ . В результате можно построить нейронный оператор  $N_{\theta^*}$ , подбирая параметры  $\theta \in \Theta$  таким образом, чтобы приближать исходное отображение  $N_{\theta^*} \approx G$ . Тогда процесс обучения сводится к задаче минимизации функции потерь  $C : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$  и имеет вид:

$$\min_{\theta} E_{a \sim \mu} [C(N_{\theta}(a), G(a))], \quad (3)$$

где  $E_{a \sim \mu}$  – математическое ожидание.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ НЕЙРОННОГО ОПЕРАТОРА

В соответствии с постановкой задачи предполагается обучение нейронного оператора, аппроксимирующего решение ДУЧП фильтрации газа в ПХГ. При разработке таких методов удобно придерживаться следующей последовательности шагов в архитектуре модели [23]:

1.  $P$  – оператор преобразования входных данных в скрытое пространство большей размерности;
2. Итеративное применение ядра интегрального оператора  $L$ ;
3.  $Q$  – оператор проекции из скрытого пространства в исходное пространство выхода.

Таким образом, структура нейронного оператора имеет вид (4):

$$N(a) = Q \circ L_L \circ L_{L-1} \circ \dots \circ L_1 \circ P(a), \quad (4)$$

где заданная глубина слоев  $L \in \mathbb{N}$ ,  $P : A(D; \mathbb{R}^{d_a}) \rightarrow U(D; \mathbb{R}^{d_v})$ ,  $d_v \geq d_a$ ,  $Q : U(D; \mathbb{R}^{d_v}) \rightarrow U(D; \mathbb{R}^{d_u})$ .

По аналогии с классическими конечномерными нейронными сетями  $L_1, \dots, L_L$  – нелинейные слои оператора,  $L_l : U(D; \mathbb{R}^{d_v}) \rightarrow U(D; \mathbb{R}^{d_u})$ ,  $v \rightarrow L_l(v)$ , которые можно записать как:

$$L_l(v)(x) = \sigma(W_l v(x) + (K(a; \theta)_l v)(x)), \quad \forall x \in D, \quad (5)$$

где  $\sigma$  – функция активации,  $W_l$  – линейное преобразование,  $K : A \times \Theta \rightarrow L(U(D; \mathbb{R}^{d_v}), U(D; \mathbb{R}^{d_v}))$ .

Оператор  $K(a, \theta_l)$  [22] – интегральный оператор вида:

$$(K(a, \theta_l)v)(x) = \int_D \kappa_\theta(x, y, a(x), a(y))v(y)dy, \forall x \in D. \quad (6)$$

Ядро  $\kappa_\theta$  представляет собой нейронную сеть с параметрами  $\theta \in \Theta$  и может иметь различную структуру. Из этого исходят различные виды нейронных операторов. Например, графовые нейронные операторы (GNO<sup>3</sup>, MGNO<sup>4</sup>) [22], низкоранговые нейронные операторы (low-rank neural operators, LNO), нейронные операторы Фурье (Fourier neural operator, FNO).

На сегодняшний день одним из перспективных методов для аппроксимации решений уравнений фильтрации является FNO, параметризующий ядро интегрального оператора в пространстве Фурье [25]. Данный метод показывает лучшую эффективность в задачах фильтрации флюидов в пористой среде по сравнению с традиционными нейросетевыми алгоритмами и другими операторными архитектурами (GNO, MGNO, LNO, DeepONet) [23]. В то же время в [26] показано на примере аппроксимации уравнения переноса, что для достижения заданной ошибки сложность FNO растет *логарифмически*, в отличие от альтернативной архитектуры DeepONet [21], у которой данный показатель растет *квадратично*.

Нейронный оператор Фурье [25] относится к классу нейронных операторов, в котором ядро может быть записано как свертка:

$$(K(a, \theta_l)v)(x) = \int_D \kappa_\theta(x - y)v(y)dy, \forall x \in D. \quad (7)$$

Чтобы эффективно параметризовать ядро, согласно теореме о свертке, данный метод рассматривает образ  $v$  в пространстве Фурье, используя быстрое преобразование Фурье  $F$  и обратное преобразование Фурье  $F^{-1}$ :

$$(K(\theta)v)(x) = F^{-1}(R_\theta(k) \cdot F(v)(k))(x), \forall x \in D, \quad (8)$$

где  $R_\theta(k) = F(\kappa_\theta)(k)$  – матрица коэффициентов преобразования Фурье от  $\kappa_\theta$ .

Таким образом, слои оператора Фурье будут иметь вид:

$$L_l(v)(x) = \sigma(W_l v(x) + F^{-1}(R_l(k) \cdot F(v)(k))(x)). \quad (9)$$

Ключевое различие между (9) и традиционной архитектурой нейронных сетей заключается в том, что все операции определены непосредственно в функциональном пространстве и, следовательно, не зависят от дискретизации данных.

В данной работе разработан метод гидродинамического моделирования ПХГ, который представляет собой модифицированный нейронный оператор Фурье, в котором слои нейронного оператора включают в себя оператор сверточной нейронной сети U-Net для повышения выразительности за счет обработки высокочастотной информации, которая не улавливается базисом Фурье<sup>5</sup>. Такой алгоритм включает следующие три шага (рис. 1):

1. Преобразование входных данных  $a(x)$  в скрытое пространство большей размерности  $v_{l_0} = P(a(x))$ ;
2. Итеративное применение слоев Фурье и последующее применение модифицированных слоев Фурье:  $v_{l_0} \rightarrow \dots \rightarrow v_{l_L} \rightarrow v_{m_0} \rightarrow \dots \rightarrow v_{m_M}$ , где  $v_{l_j}$  для  $j = \overline{0, L}$  и  $v_{m_k}$  для  $k = \overline{0, M}$ ;
3. Проекция  $v_{m_M}$  из скрытого пространства в исходное пространство выхода  $z(x) = Q(v_{m_M}(x))$ .

Модифицированный слой Фурье нейронного оператора имеет вид:

$$v_{m_{k+1}}(x) = \sigma(W(v_{m_k}(x)) + (Kv_{m_k})(x) + Uv_{m_k}(x)), \forall x \in D, \quad (10)$$

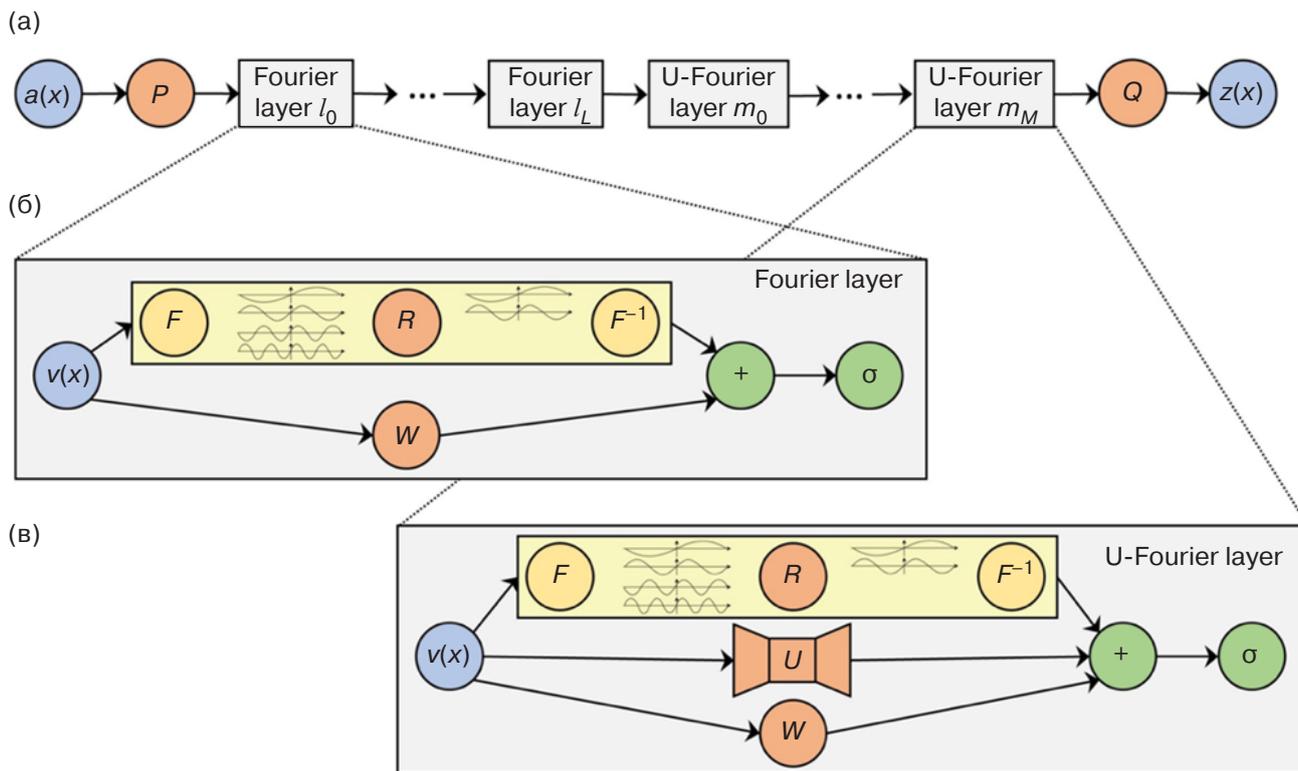
где  $W$  – линейный оператор,  $Kv_{m_k}(x) = F^{-1}(R \cdot F(v_{m_k}))(x)$  – оператор интегрального преобразования,  $U$  – оператор сверточной нейронной сети U-Net.

Важно отметить, что нейронный оператор Фурье является бесконечномерным оператором, который способен генерировать инвариантные решения вне зависимости от сетки дискретизации на обучающей и тестовой выборках. Однако за счет добавления U-Net-блока, который по своей сути не обеспечивает гибкость обучения и тестирования при различной дискретизации, авторы архитектуры жертвуют гибкостью в пользу более высокой точности. Предполагается, что такая архитектура позволит обеспечить приемлемую точность даже на относительно небольшой обучающей выборке.

<sup>3</sup> Graph neural operators.

<sup>4</sup> Multipole graph neural operator – мультипольный графовый нейронный оператор.

<sup>5</sup> Wen G., Li Z., Azizzadenesheli K., et al. *U-FNO – An enhanced Fourier neural operator-based deep-learning model for multiphase flow*. 2022. <http://arxiv.org/abs/2109.03697>. Дата обращения 25.04.2023. / Accessed April 25, 2023.



**Рис. 1.** (а) Архитектура модели:  $P$  и  $Q$  – полносвязные слои,  $z(x)$  – выход модели; (б) слой Фурье:  $R$  представляет собой параметризацию в пространстве Фурье,  $W$  – линейное смещение; (в) модифицированный слой Фурье:  $U$  – оператор U-Net, остальные обозначения имеют то же значение, что и в слое Фурье

### Конфигурация данных

Для формирования набора данных в настоящей работе используются данные из ГДМ. Период аппроксимации выбран равным сезону отборов газа. Весь набор данных формируется из 70 различных сценариев отборов с временным шагом в 10 дней. Рассматриваемое ПХГ имеет более 100 действующих скважин и сложную геометрию.

Итоговый набор данных состоит из 2850 пар «вход-выход». Для обучения было выделено 2250 образцов для тренировочной выборки и по 300 для валидационной и тестовой выборки.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве функции потерь используется относительная ошибка

$$L(y, \hat{y}) = \frac{\|y - \hat{y}\|_2}{\|y\|_2}, \quad (11)$$

поскольку пластовое давление в ПХГ в разные периоды имеет разный масштаб,  $\hat{y}$  – значение, полученное из модели.

Во время обучения начальный коэффициент скорости обучения принят равным 0.001 и постепенно

снижается с увеличением количества пройденных эпох. Обучение прекращается, когда потери на валидационной выборке больше не уменьшаются (рис. 2).

Оценка качества обученной модели проводилась на тестовой выборке. Статистические параметры ошибок модели: среднее – 0.006, стандартное отклонение – 0.2.

Обученная модель способна достаточно точно воспроизводить динамику пластового давления на период сезонов отбора. На рис. 3 представлена диаграмма рассеяния нормализованного (масштабированного на диапазон от 0 до 1) пластового давления между обученным нейронным оператором и результатами численных симуляций. Коэффициент детерминации  $R^2 = 0.999$ .

Исходя из диаграммы рассеяния следует, что распределение, генерируемое нейронным оператором на тестовой выборке, в каждой ячейке пласта очень близко к распределению из ГДМ.

Визуализация сравнения результатов моделирования динамики поля пластового давления посредством нейронного оператора и ГДМ представлена на рис. 4–6. Временной шаг означает порядковый номер десятидневного периода (декады) в рамках сезона отбора газа.

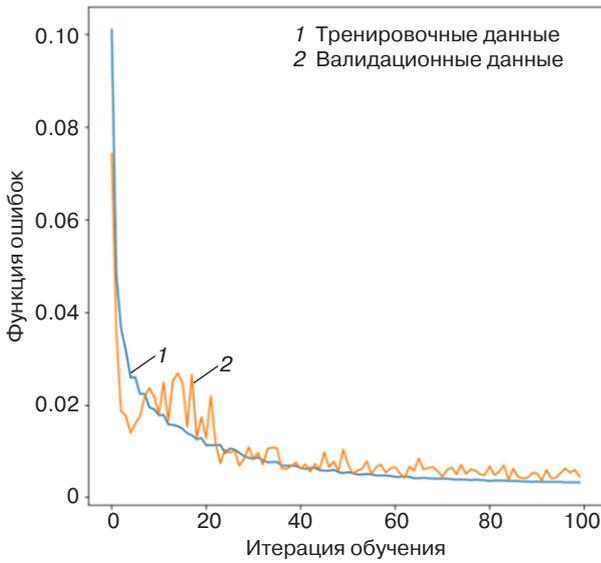


Рис. 2. График ошибки модели в процессе обучения

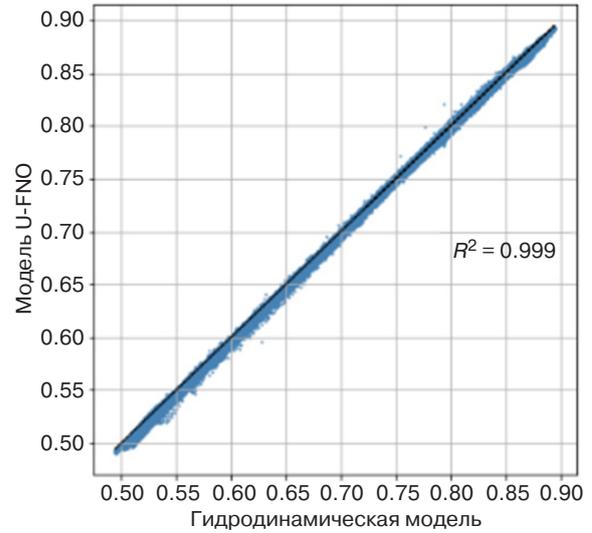


Рис. 3. Диаграмма рассеяния нормализованного пластового давления

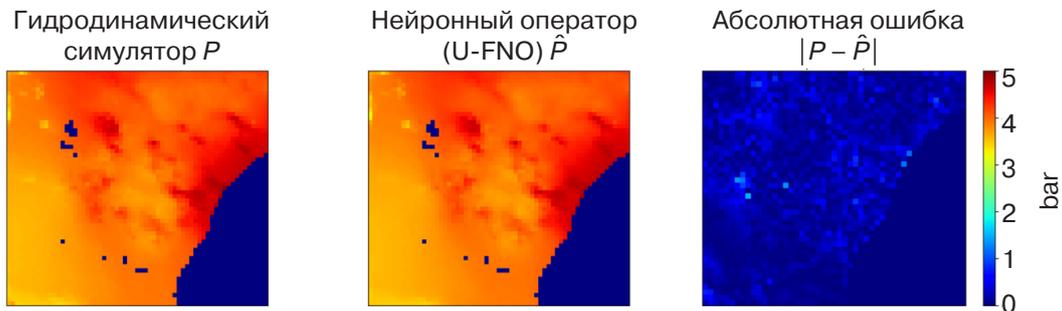


Рис. 4. Визуализация пластового давления из ГДМ, модели U-FNO и абсолютной ошибки на тестовой выборке (временной шаг 4/16)

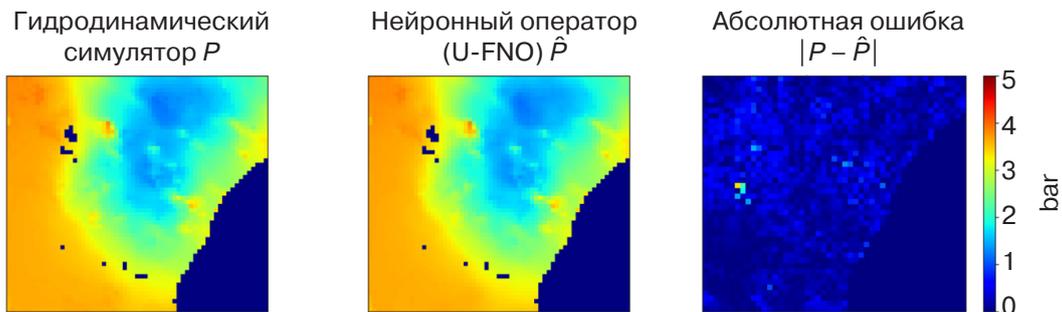


Рис. 5. Визуализация пластового давления из ГДМ, модели U-FNO и абсолютной ошибки на тестовой выборке (временной шаг 10/16)

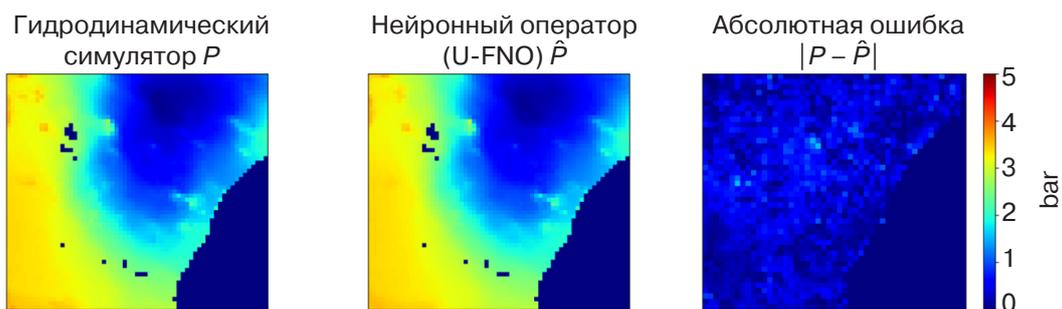


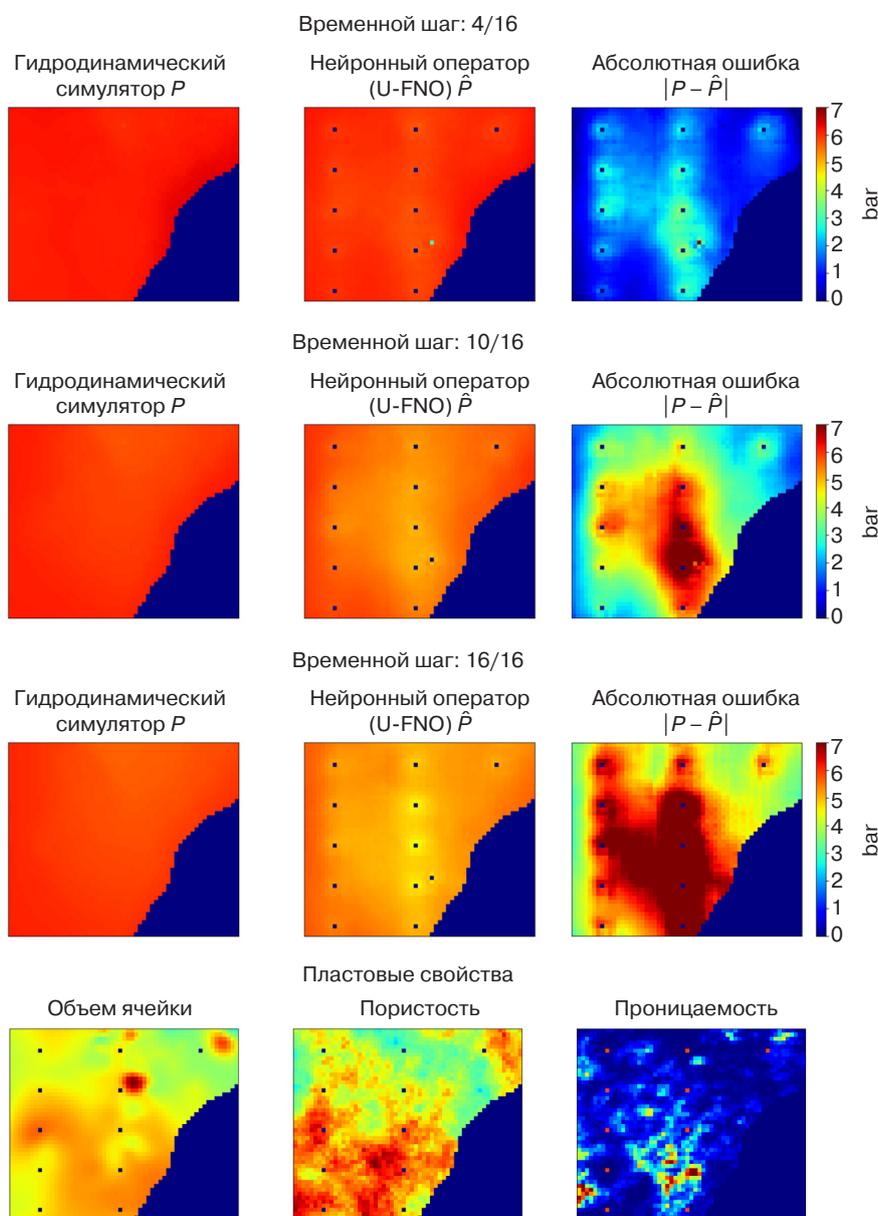
Рис. 6. Визуализация пластового давления из ГДМ, модели U-FNO и абсолютной ошибки на тестовой выборке (временной шаг 16/16)

Обученный нейронный оператор показал хорошую эффективность на тестовой выборке. Вместе с тем, полученная модель осуществляет расчет заданного сценария за доли секунды, что, по меньшей мере, в  $10^6$  раз быстрее, чем традиционный численный симулятор.

Несмотря на небольшое количество реализаций ДУЧП в обучающей выборке, авторами была проведена оценка обобщающей способности модели на примере воспроизведения динамики пластового давления в случае существенных изменений в самом объекте – изменении количества и расположения скважин. Поскольку использование разработанного нейронного оператора на данном этапе не предполагает расчеты и оптимизацию различных схем размещения скважин, в качестве опорного сценария был

взят рассчитанный на действующей ГДМ сценарий, воспроизводящий ситуацию с околонулевыми отборами из ПХГ в течение всего периода. Далее были удалены все скважины, помещены 11 новых эксплуатационных скважин в те ячейки пласта, где их никогда не было, и смоделирован сценарий форсированных отборов газа через эти скважины. Результаты представлены на рис. 7.

В нижней части рис. 7 помещены визуализации объемов ячеек дискретизированного пласта, пористости и проницаемости. Исходя из полученных результатов можно заключить, что модель реагирует на такие существенные изменения адекватно – поле пластового давления в околоскважинном пространстве изменяется с учетом распределения пластовых свойств.



**Рис. 7.** Визуализация результатов моделирования с учетом изменения фонда скважин и визуализация пластовых свойств (ячейки с размещенными скважинами выделены цветом)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что модифицированный нейронный оператор Фурье может быть успешно применен не только для задач моделирования фильтрации газа в цилиндрической системе координат с одной скважиной, но и для задач трехмерной фильтрации газа в декартовой системе координат на объектах с множеством скважин. Кроме того, разработанная модель обеспечивает высокое качество при моделировании объектов с неравномерной сеткой дискретизации и сложной геометрией, несмотря на использование в архитектуре алгоритма быстрого преобразования Фурье.

При этом нейронному оператору не требуется большой размер обучающей выборки для достижения высокой точности аппроксимации решений ДУЧП, что демонстрируется не только на тестовой

выборке, но и на искусственно сгенерированных сценариях с внесением существенных изменений в структуру моделируемого объекта. Исходя из экспериментов, обученный нейронный оператор осуществляет моделирование заданного сценария за доли секунды, что, по меньшей мере, в  $10^6$  раз быстрее, чем традиционный численный симулятор, что делает возможным применение данной модели в задачах планирования и принятия решений в отношении различных аспектов эксплуатации ПХГ, таких как оптимальное использование скважин, контроль давления и управление запасами газа.

### Вклад авторов

Все авторы в равной степени внесли свой вклад в исследовательскую работу.

### Authors' contributions

All authors equally contributed to the research work.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. LeCun Y., Bengio Y., Hinton G. Deep learning. *Nature*. 2015;521(7553):436–444. <https://doi.org/10.1038/nature14539>
2. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. *Deep Learning*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press; 2016. 775 p.
3. Aziz K., Settari A. *Petroleum Reservoir Simulation*. London, New York: Applied Science Publ.; 1979. 497 p.
4. Cybenko G. Approximation by superpositions of a sigmoidal function. *Math. Control Signals Syst.* 1989;2:303–314. <https://doi.org/10.1007/BF02551274>
5. Hornik K., Stinchcombe M., White H. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural Netw.* 1989;2(5):359–366. [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(89\)90020-8](https://doi.org/10.1016/0893-6080(89)90020-8)
6. Chen T., Chen H. Approximations of continuous functionals by neural networks with application to dynamic systems. *IEEE Trans. Neural Netw.* 1993;4(6):910–918. <https://doi.org/10.1109/72.286886>
7. Chen T., Chen H. Approximation capability to functions of several variables, nonlinear functionals, and operators by radial basis function neural networks. *IEEE Trans. Neural Netw.* 1995;6(4):904–910. <https://doi.org/10.1109/72.392252>
8. Chen T., Chen H. Universal approximation to nonlinear operators by neural networks with arbitrary activation functions and its application to dynamical systems. *IEEE Trans. Neural Netw.* 1995;6(4):911–917. <https://doi.org/10.1109/72.392253>
9. Yarotsky D. Error bounds for approximations with deep ReLU networks. *Neural Netw.* 2017;94:103–114. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.07.002>
10. Jin P., Lu L., Tang Y., et al. Quantifying the generalization error in deep learning in terms of data distribution and neural network smoothness. *Neural Netw.* 2020;130:85–99. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2020.06.024>
11. Jakubovitz D., Giryes R., Rodrigues M.R.D. Generalization Error in Deep Learning. Epub ahead of print 2018. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1808.01174>
12. Bellman R. *Dynamic Programming*. Princeton: Princeton University Press; 2010. 392 p.
13. Han J., Jentzen A., Weinan E. Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning. *Proc. Natl. Acad. Sci.* 2018;115(34):8505–8510. <https://doi.org/10.1073/pnas.1718942115>
14. Guo X., Li W., Iorio F. Convolutional Neural Networks for Steady Flow Approximation. In: *Proceedings of the 22nd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*. San Francisco California USA: ACM; 2016. P. 481–490. <https://doi.org/10.1145/2939672.2939738>
15. Tang M., Liu Y., Durlofsky L.J. A deep-learning-based surrogate model for data assimilation in dynamic subsurface flow problems. *J. Comput. Phys.* 2020;413(1):109456. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109456>
16. Zhong Z., Sun A.Y., Jeong H. Predicting CO<sub>2</sub> Plume Migration in Heterogeneous Formations Using Conditional Deep Convolutional Generative Adversarial Network. *Water Resour. Res.* 2019;55(7):5830–5851. <https://doi.org/10.1029/2018WR024592>
17. Berg J., Nyström K. A unified deep artificial neural network approach to partial differential equations in complex geometries. Epub ahead of print 2017. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1711.06464>, Related DOI: <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2018.06.056>
18. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics Informed Deep Learning (Part I): Data-driven Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations. Epub ahead of print 2017. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1711.10561>

19. Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *J. Comput. Phys.* 2019;378:686–707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
20. Baydin A.G., Pearlmutter B.A., Radul A.A., et al. Automatic differentiation in machine learning: a survey. Epub ahead of print 2015. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.1502.05767>
21. Lu L., Jin P., Pang G., Zhang Z., Karniadakis G.E. Learning nonlinear operators via DeepONet based on the universal approximation theorem of operators. *Nat. Mach. Intell.* 2021;3(3):218–229. <https://doi.org/10.1038/s42256-021-00302-5>
22. Li Z., Kovachki N., Azizzadenesheli K., et al. Neural Operator: Graph Kernel Network for Partial Differential Equations. Epub ahead of print 2020. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2003.03485>
23. Kovachki N., Li Z., Liu B., et al. Neural Operator: Learning Maps Between Function Spaces. Epub ahead of print 2021. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2108.08481>
24. Ertekin T., Abou-Kassem J.H., King G.R. *Basic Applied Reservoir Simulation*. Richardson, Tex.: Society of Petroleum Engineers; 2001. 406 p.
25. Li Z., Kovachki N., Azizzadenesheli K., et al. Fourier Neural Operator for Parametric Partial Differential Equations. Epub ahead of print 2020. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2010.08895>
26. Lanthaler S., Molinaro R., Hadorn P., et al. Nonlinear Reconstruction for Operator Learning of PDEs with Discontinuities. Epub ahead of print 2022. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2210.01074>

#### Об авторах

**Сирота Даниил Дмитриевич**, заместитель начальника отдела, Публичное акционерное общество «Газпром» (ПАО «Газпром») (197229, Россия, Санкт-Петербург, Лахтинский пр., д. 2, корп. 3, стр. 1). E-mail: D.Sirota@adm.gazprom.ru. ResearcherID KUF-1969-2024, SPIN-код РИНЦ 1137-2827, <https://orcid.org/0009-0009-9663-6188>

**Гущин Кирилл Андреевич**, заместитель начальника Департамента – начальник Управления, Публичное акционерное общество «Газпром» (ПАО «Газпром») (197229, Россия, Санкт-Петербург, Лахтинский пр., д. 2, корп. 3, стр. 1). E-mail: K.Gushchin@adm.gazprom.ru. <https://orcid.org/0009-0006-2181-3272>

**Хан Сергей Александрович**, к.т.н., заместитель начальника Департамента – начальник Управления, Публичное акционерное общество «Газпром» (ПАО «Газпром») (197229, Россия, Санкт-Петербург, Лахтинский пр., д. 2, корп. 3, стр. 1). E-mail: S.Khan@adm.gazprom.ru. Scopus Author ID 27172181100, SPIN-код РИНЦ 2591-5980

**Костиков Сергей Леонидович**, заместитель начальника Управления – начальник отдела, Публичное акционерное общество «Газпром» (ПАО «Газпром») (197229, Россия, Санкт-Петербург, Лахтинский пр., д. 2, корп. 3, стр. 1). E-mail: S.Kostikov@adm.gazprom.ru. Scopus Author ID 58283384300, <https://orcid.org/0009-0007-7298-3586>

**Бутов Кирилл Андреевич**, к.т.н., главный технолог отдела, Публичное акционерное общество «Газпром» (ПАО «Газпром») (197229, Россия, Санкт-Петербург, Лахтинский пр., д. 2, корп. 3, стр. 1). E-mail: K.Butov@adm.gazprom.ru. <https://orcid.org/0009-0008-3444-2049>

#### About the authors

**Daniil D. Sirota**, Deputy Head of Division, PJSC Gazprom (2/3, Lakhtinsky pr., St. Petersburg, 197229 Russia). E-mail: D.Sirota@adm.gazprom.ru. ResearcherID KUF-1969-2024, RSCI SPIN-code 1137-2827, <https://orcid.org/0009-0009-9663-6188>

**Kirill A. Gushchin**, Deputy Head of Department – Head of Directorate, PJSC Gazprom (2/3, Lakhtinsky pr., St. Petersburg, 197229 Russia). E-mail: K.Gushchin@adm.gazprom.ru. <https://orcid.org/0009-0006-2181-3272>

**Sergey A. Khan**, Cand. Sci. (Eng.), Deputy Head of Department – Head of Directorate, PJSC Gazprom (2/3, Lakhtinsky pr., St. Petersburg, 197229 Russia). E-mail: S.Khan@adm.gazprom.ru. Scopus Author ID 27172181100, RSCI SPIN-code 2591-5980

**Sergey L. Kostikov**, Deputy Head of Directorate – Head of Division, PJSC Gazprom (2/3, Lakhtinsky pr., St. Petersburg, 197229 Russia). E-mail: S.Kostikov@adm.gazprom.ru. Scopus Author ID 58283384300, <https://orcid.org/0009-0007-7298-3586>

**Kirill A. Butov**, Cand. Sci. (Eng.), Chief Technologist of the Division, PJSC Gazprom (2/3, Lakhtinsky pr., St. Petersburg, 197229 Russia). E-mail: K.Butov@adm.gazprom.ru. <https://orcid.org/0009-0008-3444-2049>