Russian Technological Journal.
2024;12(6):80–90

ISSN 2782-3210 (Print)
ISSN 2500-316X (Online)

Математическое моделирование

Mathematical modeling

УДК 539.3; 536.2
https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90
EDN VWASPO

CC BY

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

Развитие модельных представлений термической реакции вязкоупругих тел на температурное поле

Э.М. Карташов @

МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, 119454 Россия
@ Автор для переписки, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Резюме

Цели. В последние десятилетия в связи с созданием мощных излучателей энергии и их использованием в технологических операциях возросла актуальность исследований термической реакции твердых тел на температурное поле. Существует значительное количество публикаций, описывающих эти процессы математическими моделями динамической или квазистатической термоупругости, в основном для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. Однако при повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо явление вязкого течения. Реальное тело начинает проявлять упругие и вязкие свойства и становится вязкоупругим. Возникает достаточно сложная проблема – развитие динамической (квазистатической) термовязкоупругости в рамках соответствующих математических моделей классической прикладной термомеханики и математики. Цель работы – рассмотреть открытую проблему теории теплового удара в терминах обобщенной модели термовязкоупругости в условиях классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах. Рассматриваются три вида интенсивного нагрева: температурный, тепловой, нагрев средой. В равной мере могут быть рассмотрены режимы интенсивного охлаждения. Ставится задача: разработать модельные представления динамической (квазистатической) термовязкоупругости, допускающие точные аналитические решения соответствующих краевых задач на их основе. Указанное направление в научной литературе практически отсутствует.

Методы. Использованы методы и теоремы операционного исчисления.

Результаты. Развиты модельные представления термической реакции вязкоупругих тел с использованием предложенного нового уравнения совместности в перемещениях.

Выводы. Предложены новые интегро-дифференциальные соотношения на базе линейных реологических моделей для среды Максвелла и среды Кельвина, включающие одновременно динамические и квазистатические модели для вязкоупругих и упругих сред, обобщающие результаты предыдущих исследований. Предложенные определяющие соотношения новой формы применимы для описания термической реакции квазиупругих тел канонической формы одновременно в трех системах координат с определяющим систему параметром, что позволяет выявить влияние топологии области на величину соответствующих температурных напряжений.

Ключевые слова: тепловой удар, термовязкоупругость, обобщенные динамические модели, аналитические решения, термические напряжения

© Э.М. Карташов, 2024

• **Поступила:** 26.03.2024 • **Доработана:** 10.04.2024 • **Принята к опубликованию:** 10.10.2024

Для цитирования: Карташов Э.М. Развитие модельных представлений термической реакции вязкоупругих тел на температурное поле. *Russ. Technol. J.* 2024;12(6):80–90. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90

Прозрачность финансовой деятельности: Автор не имеет финансовой заинтересованности в представленных материалах или методах.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

RESEARCH ARTICLE

Development of model representations of thermal reaction viscoelastic bodies on the temperature field

Eduard M. Kartashov @

MIREA – Russian Technological University, 119454 Russia
@ Corresponding author, e-mail: professor.kartashov@gmail.com

Abstract
Objectives. In recent decades, the relevance of research into the thermal response of solids to a temperature field has increased in connection with the creation of powerful energy emitters and their use in technological operations. There is a significant number of publications describing these processes using mathematical models of dynamic or quasi-static thermoelasticity, mainly for most technically important materials that obey Hooke's law. However, at elevated temperatures and higher stress levels, the concept of an elastic body becomes insufficient: almost all materials exhibit more or less clearly the phenomenon of viscous flow. The real body begins to exhibit elastic and viscous properties and becomes viscoelastic. A rather complex problem arises: the development of dynamic (quasi-static) thermoviscoelasticity within the framework of the corresponding mathematical models of classical applied thermomechanics and mathematics. The purpose of the work is to consider the open problem of the theory of thermal shock in terms of a generalized model of thermoviscoelasticity under the conditions of classical Fourier phenomenology on the propagation of heat in solids. Three types of intense heating are considered: temperature, thermal, and medium heating. Intensive cooling modes can be equally considered. The task is posed: to develop model representations of dynamic (quasi-static) thermoviscoelasticity that allow accurate analytical solutions of the corresponding boundary value problems on their basis. This direction is practically absent in the scientific literature.
Methods. Methods and theorems of operational calculus were used.
Results. Model representations of the thermal response of viscoelastic bodies using the proposed new compatibility equation in displacements have been developed.
Conclusions. New integro-differential relations are proposed based on linear rheological models for the Maxwell medium and the Kelvin medium, including both dynamic and quasi-static models for viscoelastic and elastic media, generalizing the results of previous studies. The proposed constitutive relations of the new form are applicable to describe the thermal response of quasi-elastic bodies of a canonical shape simultaneously in three coordinate systems with a system-defining parameter, which makes it possible to identify the influence of the topology of the region on the value of the corresponding temperature stresses.

Keywords: heat stroke, thermoviscoelasticity, generalized dynamic models, analytical solutions, thermal stresses

• **Submitted:** 26.03.2024 • **Revised:** 10.04.2024 • **Accepted:** 10.10.2024

For citation: Kartashov E.M. Development of model representations of thermal reaction viscoelastic bodies on the temperature field. *Russ. Technol. J*. 2024;12(6):80–90. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-6-80-90

Financial disclosure: The author has no financial or proprietary interest in any material or method mentioned.

The author declares no conflicts of interest.

ВВЕДЕНИЕ

Статья продолжает исследования автора [1, 2] по развитию обобщенных локально-равновесных и локально-неравновесных процессов переноса теплоты. В данной статье изучается открытая проблема термической реакции вязкоупругих тел на нагрев массивного тела, ограниченного изнутри либо плоской поверхностью (упругое полупространство в декартовой системе координат), либо цилиндрической поверхностью (упругое пространство в цилиндрической системе координат с внутренней цилиндрической полостью), либо сферической поверхностью (упругое пространство в сферической системе координат с внутренней сферической полостью). Развивается новый подход на основе интегро-дифференциальных соотношений, включающих одновременно динамические и квазистатические модели для вязкоупругих и упругих сред, обобщающий результаты предыдущих исследований. Новые модельные представления основаны на линейных реологических моделях Максвелла и Кельвина, что позволяет отчетливо проследить влияние вязкого течения в упругой среде на температурные упругие напряжения. Приведенные результаты практически открывают новое научное направление в прикладной термомеханике и математике, а именно: исследование термической реакции вязкоупругих тел на интенсивный нагрев (охлаждение) в рамках динамических и квазистатических моделей. На первом этапе исследования проводятся в условиях наиболее распространенного на практике локально-равновесного процесса переноса теплоты на основе классической феноменологии Фурье [3] в виде линейного градиентного соотношения, связывающего вектор плотности теплового потока $\overline{q}(M,t)$ (t – время), с градиентом температуры $T(M, t)$: $\overline{q}(M,t)=-\lambda_{\mathrm{T}}\mathrm{qrad}T(M,t)$, λ_{T} – коэффициент теплопроводности. Рассматриваются три случая интенсивного нагрева границы S области $\overline{\Omega}=\{M(x,y,z)\in\overline{D}=D+S,\ t>0\}$, описывающей реальное твердое тело, а именно: температурный нагрев $T(M,t)=T_{\mathrm{c}}(t),\ M\in S,\ t>0$ ($T_{\mathrm{c}}(t)>T_0$; T_0 – начальная температура, при которой область находится в ненапряженном и недеформированном состоянии); тепловой нагрев $\partial T(M,t)/\partial n=-(1/\lambda_{\mathrm{T}})q_0(t),\ M\in S,\ t>0$ ($q_0(t)$ – величина теплового потока, $\overline{n}=(n_1,n_2,n_3)$ – внешняя нормаль к S, вектор, непрерывный на S); нагрев средой $\partial T(M,t)/\partial n=-h\left[T(M,t)-T_{\mathrm{c}}\right]$, $M\in S,\ t>0$ (h – относительный коэффициент теплообмена, T_{c} – температура окружающей среды ($T_{\mathrm{c}}(t)>T_0$). В равной мере могут быть рассмотрены и случаи резкого охлаждения, а также действия внутренних источников (стоков) теплоты.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Пусть $\sigma_{ij}(M,t),\ \varepsilon_{ij}(M,t),\ U_i(M,t)$ – соответственно компоненты тензоров напряжения, деформации и вектора перемещения, удовлетворяющие основным уравнениям (несвязанной) термоупругости (в индексных обозначениях) [1–6]:

$$\sigma_{ij,j}(M,t)+F_i(M,t)=\rho^*U_i(M,t), \tag{1}$$

$$\varepsilon_{ij}(M,t)=(1/2)\left[U_{i,j}(M,t)+U_{j,i}(M,t)\right], \tag{2}$$

$$\sigma_{ij}(M,t)=2\mu\varepsilon_{ij}(M,t)+$$
$$+\left[\lambda\varepsilon_{ii}(M,t)-(3\lambda+2\mu)\alpha_{\mathrm{T}}(T(M,t)-T_0)\right]\delta_{ij}, \tag{3}$$
$$M\in D,\ t>0,$$

где ρ^* – плотность; λ, μ – изотермические коэффициенты Ламе; G – модуль сдвига; $\lambda=2Gv/(1-2v)$; v – коэффициент Пуассона, при этом $2G(1+v)=E$, E – модуль Юнга; λ_{T} – коэффициент линейного теплового расширения, δ_{ij} – символ Кронекера, $F_i(M, t)$ – компоненты объемной силы; $e(M, t) = U_{i,i}(M, t) = \varepsilon_{ii}(M, t)$ – объемная деформация, связанная с суммой нормальных напряжений $\sigma(M, t) = \sigma_{nn}(M, t)$, ($n = x, y, z$) соотношением

$$e(M,t)=\frac{1-2v}{E}\sigma(M,t)+3\alpha_{\mathrm{T}}\left[T(M,t)-T_0\right]. \tag{4}$$

К соотношениям (1)–(4) следует присоединить граничные условия $\sum\limits_j\sigma_{ji}(M,t)n_j=f_i(M,t),\ M\in S,$ $t>0$ на той части поверхности, где заданы напряжения, и граничные условия $U_i(M,t)=\varphi_i(M,t), M\in S,$ $t>0$ – на той части поверхности, где заданы перемещения. Для частично ограниченной области $\overline{\Omega}$

следует добавить условие ограниченности всех функций, входящих в (1)–(4). Входящая в (3) температурная функция $T(M, t)$ находится из решения краевой задачи нестационарной теплопроводности вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial t}=a\Delta T(M,t)+(1/c\rho^*)f(M,t), M\in D,\ t>0,\\ &T(M,t)\big|_{t=0}=T_0, M\in S,\\ &\gamma_1\frac{\partial T(M,t)}{\partial n}+\gamma_2 T(M,t)=\gamma_3\varphi(M,t), M\in S,\ t>0,\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

a – температуропроводность; c – теплоемкость; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – коэффициенты в граничном условии.

Соотношения (1)–(4) – общие соотношения динамической термоупругости, связывающие напряжения, деформации, перемещения и температуру. При переходе к конкретным случаям выражения (1)–(4) необходимо преобразовать в так называемые уравнения совместности либо в напряжениях, либо в перемещениях и для этих уравнений записывать соответствующую задачу динамической термоупругости. Для рассматриваемого в статье случая необходимо учесть влияние кривизны граничной поверхности твердого тела на температуру и соответствующие температурные напряжения. Здесь более удобной математической моделью является уравнение «совместности» в перемещениях, одновременно охватывающее цилиндрическую, сферическую и декартову системы координат, причем в рамках обобщенной модели, затрагивающей многочисленные практические приложения.

Подставляя правые части (3) в (1) (без объемных сил) и используя далее (2) и (4), после ряда длительных преобразований приходим к трем уравнениям:

$$\Delta U_i(M,t)+\frac{1}{(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial\bar{e}(M,t)}{\partial i}-(\rho^*/G)\frac{\partial^2 U_i(M,t)}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{2(1+\nu)\alpha_\text{T}}{(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial\left[T(M,t)-T_0\right]}{\partial i},\ (i=x,y,z),$$

которые формально можно записать в виде векторного равенства

$$\Delta\overline{U}(M,t)+\frac{1}{(1-2\nu)}\text{grad}\left[\text{div}\,\overline{U}(M,t)\right]-$$
$$-(\rho^*/G)\frac{\partial^2\overline{U}(M,t)}{\partial t^2}=\quad(6)$$
$$=\frac{2(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_\text{T}\,\text{grad}\left[T(M,t)-T_0\right], M\in D,\ t>0.$$

Заметим, что при обратном переходе необходимо приравнять соответствующие компоненты в векторной записи левой и правой частей в (6).

Рассмотрим далее практические случаи динамической термоупругости на основе соотношения (6). В первом случае в декартовых координатах (x, y, z) рассматривается область $z > R$, $t > 0$, ограниченная плоской поверхностью, температурное состояние которой описывается функцией $T_i(z, t)$, $(i = 1, 2, 3)$; при этом $U_x = U_y = 0$, $U_z = U_z(z, t)$ и соотношение (6) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 U_z(z.t)}{\partial z^2}-\frac{1}{v_\text{p}^2}\cdot\frac{\partial^2 U_z(z,t)}{\partial t^2}=\quad(7)$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_\text{T}\frac{\partial\left[T_i(z,t)-T_0\right]}{\partial z},\ z>R,\ t>0.$$

Здесь $v_\text{p}=\sqrt{\dfrac{2G(1-\nu)}{\rho^*(1-2\nu)}}=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho^*}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде, близкая к скорости звука.

Интересующая нас компонента напряжения $\sigma_{zz}(z, t)$ связана с перемещением соотношением

$$\sigma_{zz}(z,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\partial U_z}{\partial z}-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_\text{T}\left[T_i(z,t)-T_0\right]\right\}.\quad(8)$$

Температурная функция удовлетворяет трем условиям нагрева:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T_i}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T_i}{\partial z^2},\ z>R,\ t>0,\ (i=1,2,3),\\ &T_i(z,t)\big|_{t=0}=T_0,\ z\ge R,\\ &T_1(z,t)\big|_{z=R}=T_\text{c},\ t>0,\\ &\frac{\partial T_2}{\partial z}\Big|_{z=R}=-(1/\lambda_\text{T})q_0,\ t>0,\\ &\frac{\partial T_3}{\partial z}\Big|_{z=R}=-h(T_3-T_\text{c}),\ t>0,\\ &\left|T_i(z,t)\right|<\infty,\ z\ge R,\ t\ge 0.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Во втором случае в сферических координатах (ρ, φ, θ) рассматривается область $\rho > R$, $t > 0$ с внутренней сферической полостью при нагреве в условиях центральной симметрии $T_i = T_i(\rho, t)$, так что $U_\varphi = U_\theta = 0$, $U_\rho = U_\rho(\rho, t)$ и (6) записывается в виде:

$$\frac{\partial U_\rho(\rho,t)}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial U_\rho(\rho,t)}{\partial\rho}-$$
$$-\frac{2}{\rho^2}U_\rho(\rho,t)-\frac{1}{v_\text{p}^2}\cdot\frac{\partial^2 U_\rho(\rho,t)}{\partial t^2}=\quad(10)$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_\text{T}\frac{\partial\left[T_i(\rho,t)-T_0\right]}{\partial\rho},\ \rho>R,\ t>0.$$

При этом

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\partial U_\rho(\rho,t)}{\partial\rho}+\frac{2\nu}{1-\nu}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,t)-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\rm T}\left[T_i(\rho,t)-T_0\right]\right\}, \quad (11)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_i(\rho,t)}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial T_i}{\partial\rho}\right),\ \rho>R,\ t>0,\\
&T_1(\rho,t)\big|_{\rho=R}=T_{\rm c},\ t>0,\\
&\frac{\partial T_2(\rho,t)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=-(1/\lambda_{\rm T})q_0,\ t>0,\\
&\frac{\partial T_3(\rho,t)}{\partial\rho}\Big|_{\rho=R}=-h\left[T_3(\rho,t)\big|_{\rho=R}-T_{\rm c}\right],\ t>0,\\
&\left|T_i(\rho,t)\right|<\infty,\ \rho\ge R,\ t\ge 0.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

В третьем случае в цилиндрических координатах (r, φ, z) рассматривается область $\rho > R$, $t > 0$ с внутренней цилиндрической полостью в условиях радиальной температуры $T_i = T_i(\rho, t)$, так что $U_\varphi = U_z = 0$, $U_r = U_r(r, t)$ и соотношение (6) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_r(r,t)}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r(r,t)-$$
$$-\frac{1}{v_{\rm p}^2}\cdot\frac{\partial^2 U_r(r,t)}{\partial t^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\rm T}\frac{\partial\left[T_i(r,t)-T_0\right]}{\partial r}, \quad (13)$$
$$r>R,\ t>0.$$

При этом:

$$\sigma_{rr}(r,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\partial U_r(r,t)}{\partial r}+\frac{\nu}{1-\nu}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{r}U_r(r,t)-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\rm T}\left[T_i(r,t)-T_0\right]\right\}, \quad (14)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_i}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial T_i}{\partial r}\right),\ r>R,\ t>0,\\
&T_i(r,t)\big|_{t=0}=T_0,\ r\ge R,\\
&T_1(r,t)\big|_{r=R}=T_{\rm c},\ t>0,\\
&\frac{\partial T_2(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R}=-(1/\lambda_{\rm T})q_0,\ t>0,\\
&\frac{\partial T_3(r,t)}{\partial r}\Big|_{r=R}=-h\left[T_3(r,t)\big|_{r=R}-T_{\rm c}\right],\ t>0,\\
&\left|T_i(r,t)\right|<\infty,\ r\ge R,\ t\ge 0.
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Представляет интерес охватить одновременно все три случая во всех трех системах координат в рамках обобщенной модели, что может представлять несомненную практическую значимость в теории теплового удара. Для удобства записи обобщенной модели введем обобщенную координату μ: $\mu = z$ в декартовых координатах, $\mu = \rho$ – в сферических, $\mu = r$ – в цилиндрических. При этом $U_\mu = U_\mu(\mu, t)$, $\sigma_{\mu\mu} = \sigma_{\mu\mu}(\mu, t)$, $T_i = T_i(\mu, t)$.

Соотношения (7)–(15) для упругого тела теперь можно записать следующим образом в обобщенном виде:

$$\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu\right)-\frac{1}{v_{\rm p}^2}\cdot\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\rm T}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[T_i(\mu,t)-T_0\right],\ \mu>R,\ t>0, \quad (16)$$

$$\sigma_{\mu\mu}(\mu,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\left\{\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}+\frac{(2m+1)\nu}{(1-\nu)}\cdot\frac{1}{\mu}U_\mu-\right.$$
$$\left.-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\rm T}\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]\right\},\ \mu>R,\ t>0, \quad (17)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial T_i(\mu,t)}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T_i}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\cdot\frac{\partial T_i}{\partial\mu}\right),\ \mu>R,\ t>0,\\
&T_i(\mu,t)\big|_{t=0}=T_0,\ \mu\ge R,\\
&T_1(\mu,t)\big|_{\mu=R}=T_{\rm c},\ t>0,\\
&\frac{\partial T_2(\mu,t)}{\partial\mu}\Big|_{\mu=R}=-(1/\lambda_{\rm T})q_0,\ t>0,\\
&\frac{\partial T_3(\mu,t)}{\partial\mu}\Big|_{\mu=R}=-h\left[T_3(\mu,t)\big|_{\mu=R}-T_{\rm c}\right],\ t>0,\\
&\left|T_i(\mu,t)\right|<\infty,\ \mu\ge R,\ t\ge 0.
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Здесь

$$\mu=\begin{cases}
z,\ z>R,\ m=-1/2\ -\\
\qquad\text{для декартовых координат,}\\
\rho,\ \rho>R,\ m=1/2\ -\\
\qquad\text{для сферических координат,}\\
r,\ r>R,\ m=0\ -\\
\text{для цилиндрических координат.}
\end{cases} \quad (19)$$

К полной постановке динамической задачи для перемещений в упругой области следует добавить начальные и граничные условия (в последнем случае граница области предполагается свободной от напряжений):

$$U_\mu(\mu,t)\Big|_{t=0},\ \frac{\partial U_\mu(\mu,t)}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,\ \mu\ge R, \tag{20}$$

$$\left[\frac{\partial U_\mu(\mu,t)}{\partial \mu}+\frac{(2m+1)\nu}{(1-\nu)}\cdot\frac{1}{\mu}U_\mu(\mu,t)\right]\Bigg|_{\mu=R}= \tag{21}$$

$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]_{\mu=R},\ t>0,$$

$$\left|U_\mu(\mu,t);\sigma_{\mu\mu}(\mu,t)\right|<\infty,\ \mu\ge R,\ t\ge 0. \tag{22}$$

ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ В РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ

Многочисленные исследования термической реакции твердых тел выполнены, в основном, для большинства технически важных материалов, подчиняющихся закону Гука. Считается, что при относительно низком уровне температур и напряжений поведение широкого класса материалов находится в хорошем соответствии с теорией термоупругости, изложенной выше.

При повышенных температурах и более высоком уровне напряжений понятие об упругом теле становится недостаточным: почти у всех материалов обнаруживается более или менее отчетливо выраженное явление вязкого течения. В этом случае поведение реального тела принято называть вязкоупругим, т.к. тело одновременно проявляет упругие и вязкие свойства. Чтобы математически описать неупругое поведение тела при заданных условиях нагрева и напряжения, необходимо соответствующим образом обобщить соотношения между напряжениями и деформациями (3)–(4).

Реологические модели, которые учитывают одновременно протекающие процессы упругого деформирования и вязкого течения, благодаря достаточной простоте принятых соотношений между напряжениями и деформациями дают возможность математически проанализировать, как будут вести себя реальные тела в различных условиях нагружения. В этом отношении учет реологических эффектов имеет большое значение при проектировании элементов конструкций, подвергающихся воздействию высоких температур.

Выпишем все необходимые соотношения для реологических законов, связывающих напряжения $\sigma_{ij}(M,t)$ и деформации $\varepsilon_{ij}(M,t)$, $(i,j=x,y,z)$. Для этого введем девиатор напряжений $s_{ij}(M,t)$ и девиатор деформаций $e_{ij}(M,t)$ соотношениями:

$$s_{ij}(M,t)=\sigma_{ij}(M,t)-\sigma^*(M,t)\delta_{ij}, \tag{23}$$

$$e_{ij}(M,t)=\varepsilon_{ij}(M,t)-\varepsilon^*(M,t)\delta_{ij}, \tag{24}$$

где σ^* и ε^* – среднее нормальное напряжение и среднее удлинение:

$$\sigma^*(M,t)=\frac{1}{3}\sum_i\sigma_{ii}(M,t),\ \ \varepsilon^*(M,t)=\frac{1}{3}\sum_i\varepsilon_{ii}(M,t). \tag{25}$$

При помощи этих девиаторов соотношения (3)–(4) можно записать в виде:

$$s_{ij}(M,t)=2Ge_{ij}(M,t), \tag{26}$$

$$\varepsilon^*(M,t)=\frac{1-2\nu}{2G(1+\nu)}\sigma^*(M,t)+\alpha_{\text{T}}\left[T(M,t)-T_0\right]. \tag{27}$$

Эти равенства описывают поведение линейной упругой среды. Если к соотношениям закона Гука добавить слагаемое, выражающее ньютонов закон вязкости (последовательное или параллельное соединение пружины и вязкого сопротивления), то полученные зависимости будут приводить к среде Максвелла:

$$\frac{\partial s_{ij}(M,t)}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\text{рел}}}s_{ij}(M,t)=2G\frac{\partial e_{ij}(M,t)}{\partial t} \tag{28}$$

и к среде Кельвина

$$s_{ij}(M,t)=2G\left[e_{ij}(M,t)+\tau_{\text{рел}}\frac{\partial e_{ij}(M,t)}{\partial t}\right]. \tag{29}$$

При этом соотношение (27) остается без изменения. Последнее означает, что при гидростатическом сжатии или растяжении тело ведет себя как вполне упругое. Постоянная $\tau_{\text{рел}}=\eta/G$ носит название «время релаксации» в (28) и «время запаздывания» в (29), η – вязкость материала. Разумеется, поведение материалов на практике сложнее случаев (28)–(29), однако, если основываться на применении простейших моделей, то для металлов при высоких температурах и для полимеров, сочетающих процессы упругого деформирования и вязкого течения можно использовать схему Максвелла, а для материалов с внутренним трением при изучении затухающих колебаний – схему Кельвина.

Заметим, что при $\tau_{\text{рел}}=0\ (\eta=\infty)$ соотношение (28) дает среду Гука, при $\tau_{\text{рел}}=0\ (\eta=0)$ в (29) закон Кельвина сводится к зависимости (26).

При тепловом ударе (мгновенное нагревание или охлаждение граничной поверхности) напряжения скачкообразно изменяются на величину $\Delta=\left|E\alpha_{\text{T}}\left(T_{\text{c}}-T_0\right)\right|$ [3]. В упругой среде эти напряжения остаются неизменными, а в среде Максвелла начинается вязкое течение, вследствие которого напряжение непрерывно убывает, асимптотически приближаясь к нулевому значению. В среде Кельвина, напротив, скачок напряжения превышает соответствующее упругое значение, к которому это напряжение впоследствии асимптотически приближается.

НОВЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ

Так как соотношения между напряжениями и деформациями для вязкоупругих материалов содержат переменную t – время, то соответствующие математические модели будут нестационарными и, следовательно, динамическими. Приведенные соотношения могут быть использованы для описания термической реакции вязкоупругих тел канонической формы (бесконечная пластина; полупространство, ограниченное плоской поверхностью; тела цилиндрической и сферической формы и др.) при заданных условиях нагрева (или охлаждения) в рамках соответствующей краевой задачи нестационарной теплопроводности. Для этого на начальном этапе необходимо получить дифференциальное уравнение динамической термовязкоупругости. Рассмотрение этого вопроса начнем в декартовых координатах для вязкоупругого полупространства $z \ge l$ (l – левая граница области) температуры $T(z, t)$, граница которого свободна от напряжений. При этом $U_x = U_y = 0$, $U_z = U_z(z, t)$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = 0$, $e_{zz} = \varepsilon_{zz}$, напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z, t)$ для $i = j$, $\sigma_{ij} = 0$ для $i \ne j$, $(i, j = x, y, z)$.

Имеем далее:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial s_{zz}(z,t)}{\partial t}+\frac{1}{\tau_{\text{рел}}}s_{zz}(z,t)=\frac{4G}{3}\cdot\frac{\partial\varepsilon_{zz}(z,t)}{\partial t},\ t>0,\\&s_{zz}(z,t)\big|_{t=0}=0,\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{zz}(z,t)=\frac{\partial U_z(z,t)}{\partial z},\\&\frac{\partial\sigma_{zz}(z,t)}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2U_z(z,t)}{\partial t^2},\ z>l,\ t>0,\end{aligned}\right\} \quad (31)$$

$$\sigma_{zz}=s_{zz}+\sigma^*=$$
$$=s_{zz}+\frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)}\varepsilon_{zz}-\frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_{\text{T}}(T_i-T_0). \quad (32)$$

Находим решение задачи Коши (30):

$$s_{zz}=\frac{4G}{3}\varepsilon_{zz}-\frac{4G}{3\tau_{\text{рел}}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\varepsilon_{zz}(z,\tau)d\tau. \quad (33)$$

Найдем σ_{zz} из (32)–(33) и подставим в (31). В результате приходим к следующему соотношению для среды Максвелла:

$$\frac{\partial^2U_z}{\partial z^2}-\frac{1}{v_{\text{p}}^2}\cdot\frac{\partial^2U_z}{\partial t^2}=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\frac{\partial\left[T_i(z,t)-T_0\right]}{\partial z}+$$
$$+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_{\text{рел}}(1-\nu)}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\frac{\partial^2U_z(z,\tau)}{\partial z^2}d\tau. \quad (34)$$

При этом

$$\sigma_{zz}(z,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\cdot\frac{\partial U_z}{\partial z}-$$
$$-\frac{4G}{3\tau_{\text{рел}}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\frac{\partial U_z(z,\tau)}{\partial z}d\tau- \quad (35)$$
$$-\frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(z,t)-T_0\right].$$

Аналогичными рассуждениями в сферической системе координат (центральная симметрия $T_i = T_i(\rho, t)$ для вязкоупругой области $\rho > R$, $t > 0$ находим соотношения для среды Максвелла:

$$\frac{\partial^2U_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^2}U_\rho-\frac{1}{v_{\text{p}}^2}\cdot\frac{\partial^2U_\rho}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\text{T}}\frac{\partial\left[T_i(\rho,t)-T_0\right]}{\partial\rho}+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_{\text{рел}}(1-\nu)}\times \quad (36)$$
$$\times\int_0^t\exp\left[-\tau\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\left(\frac{\partial^2U_\rho}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\cdot\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{2}{\rho^2}U_\rho(\rho,\tau)\right)d\tau,$$

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}+\frac{2\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{\rho}U_\rho-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(\rho,t)-T_0\right]-\right. \quad (37)$$
$$\left.-\frac{2}{3\tau_{\text{рел}}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\left(\frac{\partial U_\rho}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}U_\rho(\rho,\tau)\right)d\tau\right\}.$$

В цилиндрических координатах (радиальный поток $T_i = T_i(r, t)$) для вязкоупругой области $r > R$, $t > 0$ аналогичные рассуждения приводят к результатам:

$$\frac{\partial^2U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r-\frac{1}{v_{\text{p}}^2}\cdot\frac{\partial^2U_r}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\frac{\partial\left[T_i(r,t)-T_0\right]}{\partial r}+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_{\text{рел}}(1-\nu)}\times \quad (38)$$
$$\times\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\left(\frac{\partial^2U_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{r^2}U_r(r,\tau)\right)d\tau,$$

$$\sigma_{rr}(r,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial U_r}{\partial r}+\frac{\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{r}U_r-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(r,t)-T_0\right]-\right.\qquad(39)$$
$$\left.-\frac{2}{3\tau_{\text{рел}}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\left(\frac{\partial U_r}{\partial r}-\frac{1}{2r}U_r(r,\tau)\right)d\tau\right\}.$$

Теперь в координатах (μ, t) можно записать обобщенную модель динамической термовязкоупругости одновременно для всех трех систем координат.

Для среды Максвелла:

$$\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu\right)-\frac{1}{v_{\text{p}}^2}\cdot\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\frac{\partial\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]}{\partial\mu}+\frac{2(1-2\nu)}{3\tau_{\text{рел}}(1-\nu)}\times\qquad(40)$$
$$\times\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\left[\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu(\mu,\tau)\right)\right]d\tau,$$

$$\sigma_{\mu\mu}(\mu,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}+\frac{(2m+1)\nu}{(1-\nu)}\cdot\frac{1}{\mu}U_\mu-\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]\right\}-\qquad(41)$$
$$-\frac{4G}{3\tau_{\text{рел}}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\left[\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{2m+1}{2\mu}U_\mu(\mu,\tau)\right]d\tau.$$

Конкретная система координат в соотношениях (40)–(41) фиксируется записью (19).

Для среды Кельвина:

$$\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu\right)-\frac{1}{v_{\text{p}}^2}\cdot\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial t^2}=$$
$$=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_{\text{T}}\frac{\partial\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]}{\partial\mu}-\frac{2\tau_{\text{рел}}}{3}\cdot\frac{(1-2\nu)}{1-\nu}\times\qquad(42)$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial^2 U_\mu}{\partial\mu^2}+\frac{2m+1}{\mu}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{1}{\mu}U_\mu\right)\right].$$

$$\sigma_{\mu\mu}(\mu,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\times$$
$$\times\left\{\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}+\frac{\nu}{1-\nu}\cdot\frac{2m+1}{\mu}U_\mu-\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(\mu,t)-T_0\right]\right\}+\qquad(43)$$
$$+\frac{4G\tau_{\text{рел}}}{3}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial U_\mu}{\partial\mu}-\frac{2m+1}{2\mu}U_\mu\right).$$

Здесь, как и выше в (41), соответствующая система координат определяется условиями (19). Функции $T_i(\mu, t)$, $(i = 1, 2, 3)$ соответствуют постановкам (18). Для записи краевых задач для уравнений (40) и (42) следует добавить начальные условия (20), условия ограниченности (22) и граничное условие для свободной от напряжений (41) и (43) границы области $\mu \geq R$, $t \geq 0$. При проведении численных экспериментов для различных условий теплового нагрева (или охлаждения), указанных в (18), уравнения (40) и (42) допускают преобразования Лапласа, что позволяет в пространстве изображений перейти к линейным краевым задачам для перемещений и после их нахождения выписать все (ненулевые) компоненты тензоров напряжений и деформаций, затем после перехода к оригиналам становится возможным воспроизвести полную картину динамической реакции вязкоупругого тела на тепловой удар. Можно использовать для этих целей также и частные соотношения (34), (36), (38), а можно (что более интересно) перейти сразу к обобщенным моделям для уравнений (40), (42). Автором в [2] развит аналитический метод нахождения точных операционных решений такого рода обобщенных уравнений, что в конечном счете позволяет описать влияние топологии области (фиксируя в решении задачи m) на величину вязкоупругих температурных напряжений. Последнее с практической точки зрения представляет значительный интерес для многих направлений науки и техники [3–6].

Можно указать еще один новый подход на основе девиаторных соотношений, также приводящий к динамической постановке термовязкоупругой задачи. Рассмотрим этот подход для декартовых координат. Находим из (32)–(33):

$$\sigma_{zz}(z,t)=\frac{2G(1-\nu)}{(1-2\nu)}\varepsilon_{zz}-\frac{2G(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha_{\text{T}}\left[T_i(z,t)-T_0\right]-$$
$$-\frac{4G}{3\tau_{\text{рел}}}\int_0^t\exp\left[-\frac{(t-\tau)}{\tau_{\text{рел}}}\right]\varepsilon_{zz}(z,\tau)d\tau.\qquad(44)$$

Операционным методом находим из (44) $\bar{\varepsilon}_{zz}(z,p)$ и подставляем найденное соотношение в операционную форму уравнения

$$\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2}=\rho^*\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\varepsilon_{zz}).$$

После длительных преобразований приходим к уравнению нового вида:

$$\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2}-\frac{1}{v_{\text{p}}^2}\cdot\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial t^2}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_{\text{T}}\rho^*\frac{\partial^2\left[T_i(z,t)-T_0\right]}{\partial t^2}+\frac{m_1}{v_{\text{p}}^2\tau_{\text{рел}}}\times$$
$$\times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t\exp\left[-\left(\frac{m_2}{3\tau_{\text{рел}}}\right)(t-\tau)\right]\sigma_{zz}(z,\tau)d\tau+\frac{m_1m_2}{\tau_{\text{рел}}(1/\rho^*)}\times\qquad(45)$$
$$\times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t\exp\left[-\left(\frac{m_2}{3\tau_{\text{рел}}}\right)(t-\tau)\right]\alpha_{\text{T}}\left[T_i(z,\tau)-T_0\right]d\tau,\ z>l,\ t>0.$$

Здесь $m_1 = \dfrac{2(1-2v)}{3(1-v)}$, $m_2 = \dfrac{1+v}{1-v}$.

Уравнение (45) обобщает известное уравнение Даниловской для упругих тел [7] на вязкоупругие тела и фактически дает дальнейшее развитие указанной проблемы (в рамках среды Максвелла). Для среды Кельвина имеем следующее уравнение:

$$\frac{\partial^2\sigma_{zz}}{\partial z^2} = \frac{1}{m_1\tau_{\text{рел}} v_{\text{p}}^2}\times \\ \times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{m_1\tau_{\text{рел}}}\right]\sigma_{zz}(z,\tau)d\tau + \frac{m_2\rho^*}{m_1\tau_{\text{рел}}}\times \\ \times\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t \exp\left[-\frac{(t-\tau)}{m_1\tau_{\text{рел}}}\right]\alpha_{\text{T}}\left[T_i(z,\tau)-T_0\right]d\tau. \quad (46)$$

Для проведения численных расчетов, например, на основе уравнения (45), целесообразно перейти к безразмерным величинам по формулам:

$$\xi = \frac{v_{\text{p}}(z-l)}{a},$$
$$\tau = \frac{v_{\text{p}}^2 t}{a},$$
$$\beta_1 = \frac{2(1-2v)}{3(1-v)\tau_{\text{рел}}(v_{\text{p}}^2/a)},$$
$$\beta_2 = \frac{(1+v)}{(1-v)3\tau_{\text{рел}}(v_{\text{p}}^2/a)},$$
$$S_{\text{T}} = \frac{2G\alpha_{\text{T}}(T_{\text{c}}-T_0)(1+v)}{(1-2v)},$$
$$\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau) = \frac{\sigma_{zz}(z,t)}{S_{\text{T}}},$$
$$W_i(\xi,\tau) = \frac{T_i(z,t)-T_0}{T_{\text{c}}-T_0}.$$

Уравнение (45) принимает вид:

$$\frac{\partial^2\sigma_{\xi\xi}}{\partial\xi^2} - \frac{\partial^2\sigma_{\xi\xi}}{\partial\tau^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial\tau^2} + \beta_1\times \\ \times\int_0^\tau \exp\left[-\beta_2(\tau-\tau')\right]\left[\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau')+W(\xi,\tau')\right]d\tau' \quad (47)$$

и в такой форме является более удобным для преобразований в пространстве изображений по Лапласу, т.к. содержит слагаемое типа свертки (что удобно для применения преобразования Лапласа).

Найдем операционное решение уравнения (47):

$$\bar\sigma_{\xi\xi}(\xi,p) = \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\overline{W}(0,p)\times \\ \times\int_0^\infty \exp\left[-p(\xi+\xi')\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]d\xi' - \\ -\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\overline{W}(\xi,p)\times \\ \times\int_\xi^\infty \exp\left[-p(\xi'-\xi)\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]d\xi' - \\ -\frac{1}{2}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\overline{W}(\xi,p)\times \\ \times\int_0^\xi \exp\left[-p(\xi-\xi')\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]d\xi'. \quad (48)$$

Представленное изображение является характерным для динамических задач термовязкоупругости и отличается от классических изображений (с оригиналами) в таблицах [8]. Ключевым вопросом при нахождении оригинала сложного изображения (48) является предварительное нахождение оригинала изображения

$$\overline{\Psi}_i(\xi,\xi',p) = \frac{1}{p}\exp\left[-\gamma_i(\xi,\xi')\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]. \quad (49)$$

Здесь можно использовать подход, разработанный автором в [2] для сложных изображений. Используем для этих целей интеграл Римана – Меллина, учитывая, что функция (49) имеет две точки ветвления. Опуская длительные выкладки, приведем конечный результат:

$$\Psi_i(\xi,\xi',\tau) = \left\{1 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\beta_1}\frac{1}{x+\beta_2}\exp\left[-(x+\beta_2)\tau\right]\times \right. \\ \left. \times\sin\left[\gamma_i(\xi,\xi')(x+\beta_2)\sqrt{\frac{\beta_1-x}{x}}\right]dx\right\}\times\eta\left[\tau-\gamma_i(\xi,\xi')\right]. \quad (50)$$

Здесь:

$$\gamma_i(\xi,\xi') = \begin{cases}(\xi+\xi'), & i=1,\\ (\xi'-\xi), & i=2,\\ (\xi-\xi'), & i=3,\end{cases}$$

$\eta(z)$ – функция Хевисайда. Теперь можно выписать оригинал изображения (48):

$$\sigma_{\xi\xi}(\xi,\tau) = -W(\xi,\tau) - \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\infty d\xi'\int_0^\tau \frac{\partial W(0,\tau')}{\partial\tau'}\Psi_1(\xi,\xi',\tau-\tau')d\tau' - \\ -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\int_\xi^\infty d\xi'\int_0^\tau \frac{\partial W(\xi,\tau')}{\partial\tau'}\Psi_2(\xi,\xi',\tau-\tau')d\tau' + \\ +\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\int_0^\xi d\xi'\int_0^\tau \frac{\partial W(\xi,\tau')}{\partial\tau'}\Psi_3(\xi,\xi',\tau-\tau')d\tau'. \quad (51)$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие системы координат.

Заканчивая эту часть теории динамической термовязкоупругости, следует сравнить обобщенные соотношения (16)–(17) для упругой среды и соотношения (40), (41) для модели Максвелла и (42), (43) для модели Кельвина для вязкоупругой среды. Здесь наглядно проявляется влияние вязкости и ее вклад в обобщенную термомеханику. Фактически приведенные соотношения (как и (45), (46), (51)) открывают перспективное научное направление, связанное с исследованием термической реакции вязкоупругих сред на нагрев (или охлаждение) в терминах динамической вязкоупругости. Например, в (51) могут быть рассмотрены многочисленные случаи нагрева (охлаждения) в рамках модельных задач (9) с различным тепловым потоком: однородным, неоднородным, импульсным, пульсирующим, периодическим, апериодическим и др. Каждый случай такого изучения представляет собой самостоятельное научное исследование, затрагивающее не только термомеханику, но и вычислительную математику и в особенности операционное исчисление при нахождении оригиналов сложных изображений. Заметим, что подобного рода решения динамических задач в литературе практически не рассмотрены. Дальнейшие исследования указанной проблемы заключаются в развитии обобщенных модельных представлений термической реакции вязкоупругих сред для локально-неравновесных процессов переноса теплоты [9–15].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены новые модельные представления интегро-дифференциальной формы для динамической и квазистатической термовязкоупругости для различных случаев теплового воздействия на вязкоупругие тела одновременно в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат. Приведенные соотношения позволяют аналитически изучить многочисленные практические случаи термической реакции вязкоупругой среды (вязкоупругих тел канонической формы) в рамках линейных реологических моделей Максвелла и Кельвина в терминах классической феноменологии Фурье о распространении теплоты в твердых телах и автоматически могут быть распространены на локально-неравновесные процессы теплообмена в терминах феноменологии Максвелла – Каттанео – Лыкова – Вернотта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Карташов Э.М. Модельные представления теплового удара в динамической термоупругости. *Russ. Technol. J.* 2020;8(2):85–108. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108
2. Карташов Э.М. Новые операционные соотношения для математических моделей локально-неравновесного теплообмена. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):68–79. https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79
3. Карташов Э.М., Кудинов В.А. *Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости*. М.: URSS; 2012. 670 с. ISBN 978-5-397-02750-2
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели термомеханики*. М.: ФИЗМАТЛИТ; 2002. 168 с.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана; 2008. 512 с. ISBN 978-5-7038-3162-5
6. Боли Б., Уэйнер Дж. *Теория температурных напряжений*: пер. с англ. М.: Мир; 1964. 517 с.
7. Даниловская В.И. Температурные напряжения в упругом полупространстве, возникающие вследствие внезапного нагрева его границы. *Прикладная математика и механика.* 1950;14(3):316–324.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. *Справочник по операционному исчислению*. М.: Высшая школа; 1965. 467 с.
9. Кудинов И.В., Кудинов В.А. Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности. *Инженерно-физический журнал*. 2015;88(2):393–408.
10. Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В. Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности и диссипации энергии. *Теплофизика и аэромеханика*. 2017;24(6):929–935.
11. Баумейстер К., Хамилл Т. Гиперболичесое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле. *Теплопередача.* 1969;4:112–119.
12. Соболев С.Л. Локально-неравновесные модели процессов переноса. *Успехи физ. наук*. 1997;167(10):1095–1106. https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095
13. Савельева И.Ю. Вариационная формулировка математической модели процесса стационарной теплопроводности с учетом пространственной нелокальности. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия: Естественные науки*. 2022;2(101):68–86. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-68-86

14. Кудинов В.А., Кудинов И.В. Исследование теплопроводности с учетом конечной скорости распространения теплоты. *Теплофизика высоких температур*. 2013;51(2):301–310.
15. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. *Обобщенная термомеханика*. Киев: Наукова думка; 1976. 312 с.

REFERENCES

1. Kartashov E.M. Model representations of heat shock in terms of dynamic thermal elasticity. *Russ. Technol. J.* 2020;8(2):85–108 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2020-8-2-85-108
2. Kartashov E.M. New operational relations for mathematical models of local nonequilibrium heat transfer. *Russ. Technol. J.* 2022;10(1):68–79 (in Russ.). https://doi.org/10.32362/2500-316X-2022-10-1-68-79
3. Kartashov E.M., Kudinov V.A. *Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoi termouprugosti* (*Analytical Theory of Thermal Conductivity and Applied Thermoelasticity*). Moscow: URSS; 2012. 670 p. (in Russ.). ISBN 978-5-397-02750-2
4. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli termomekhaniki* (*Mathematical Thermomechanics Models*). Moscow: FIZMATLIT; 2002. 168 p. (in Russ.).
5. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mekhaniki i elektrodinamiki sploshnoi sredy* (*Mathematical Models of Mechanics and Electrodynamics of a Continuous Medium*. Moscow: Bauman Press; 2008. 512 p. (in Russ.). ISBN 978-5-7038-3162-5
6. Boley B., Weiner J. *Teoriya temperaturnykh napryazhenii* (*Theory of Thermal Stresses*): transl. from Engl. Moscow: Mir; 1964. 517 p. (in Russ.).
[Boley B., Weiner J. *Theory of Thermal Stresses.* N.Y., London: Wiley & Sons; 1960. 608 p.]
7. Danilovskaya V.I. Temperature stresses in an elastic half-space arising due to sudden heating of its boundary. *Prikladnaya matematika i mehanika = J. Appl. Math. Mech.* 1950;14(3):316–324 (in Russ.).
8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu* (*Handbook of Operational Calculus*). Moscow: Vysshaya shkola; 1965. 467 p. (in Russ.).
9. Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical Simulation of the Locally Nonequilibrium Heat Transfer in a Body with Account for its Nonlocality in Space and Time. *J. Eng. Phys. Thermophy.* 2015;88(2):406–422. https://doi.org/10.1007/s10891-015-1206-6
[Original Russian Text: Kudinov I.V., Kudinov V.A. Mathematical Simulation of the Locally Nonequilibrium Heat Transfer in a Body with Account for its Nonlocality in Space and Time. *Inzhenerno-Fizicheskii Zhurnal.* 2015;88(2):393–408 (in Russ.).]
10. Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Thermophys. Aeromech.* 2017;24(6):901–907. https://doi.org/10.1134/S0869864317060087
[Original Russian Text: Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V. The development and investigation of a strongly non-equilibrium model of heat transfer in fluid with allowance for the spatial and temporal non-locality and energy dissipation. *Teplofizika i Aeromekhanika*. 2017;24(6):929–935 (in Russ.).]
11. Baumeister K., Hamill T. Hyperbolic heat equation. Solving the problem of a semi-infinite body. *Teploperedacha = J. Heat Transfer*. 1969;4:112–119 (in Russ.).
12. Sobolev S.L. Local Non-Equilibrium Transport Models. *Phys. Usp*. 1997;40(10):1043. https://doi.org/10.1070/PU1997v040n10ABEH000292
[Original Russian Text: Sobolev S.L. Local Non-Equilibrium Transport Models. *Uspekhi Fizicheskikh Nauk.* 1997;167(10): 1095–1106 (in Russ). https://doi.org/10.3367/UFNr.0167.199710f.1095]
13. Savelyeva I.Yu. Variational formulation of a mathematical model of stationary thermal heat conduction with account spatial nonlocality. *Herald of the Bauman Moscow State University. Series Natural Sciences.* 2022;2(101):68–86 (in Russ.). https://doi.org/10.18698/1812-3368-2022-2-68-86
14. Kudinov V.A., Kudinov I.V. Studying heat conduction taking into account the finite rate of heat propagation. *High Temp.* 2013;51(2):268–276. https://doi.org/10.1134/S0018151X1204013X
[Original Russian Text: Kudinov V.A., Kudinov I.V. Studying heat conduction taking into account the finite rate of heat propagation. *Teplofizika Vysokikh Temperatur*. 2013;51(2):301–310 (in Russ.).]
15. Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M. *Obobshchennaya termomekhanika* (*Generalized Thermomechanics*). Kiev: Naukova dumka; 1976. 312 p. (in Russ.).

Об авторе

Карташов Эдуард Михайлович, д.ф.-м.н., Заслуженный деятель науки Российской Федерации, Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации, Почетный работник науки и техники Российской Федерации, Почетный профессор МИТХТ им. М.В. Ломоносова, Лауреат Золотой медали Академии наук Беларуси по теплофизике, профессор, кафедра высшей и прикладной математики, Институт тонких химических технологий им. М.В. Ломоносова, ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет (119454, Россия, Москва, пр-т Вернадского, д. 78). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, https://orcid.org/0000-0002-7808-4246

About the author

Eduard M. Kartashov, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Honored Scientist of the Russian Federation, Honorary Worker of Higher Professional Education of the Russian Federation, Honorary Worker of Science and Technology of the Russian Federation, Honorary Professor of the Lomonosov Moscow State University of Fine Chemical Technology, Laureate of the Golden Medal of the Academy of Sciences of Belarus in Thermophysics, Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, M.V. Lomonosov Institute of Fine Chemical Technologies, MIREA – Russian Technological University (78, Vernadskogo pr., Moscow, 119454 Russia). E-mail: professor.kartashov@gmail.com. Scopus Author ID 7004134344, ResearcherID Q-9572-2016, https://orcid.org/0000-0002-7808-4246